

# 1. 198 polygroups with 1–5 atoms

(**1**)    1 Mandatory: 1'1'1'  
 0 Forbidden: —

;	1'
1'	1'

$|D_2| = 0$   
 $|D_3| = 0$   
 $|D_4| = 0$   
 No diversity 4x4s !  
 $B_5$  is a basis  
 $B_6$  is a basis

$\mathfrak{R}_e(1)$ . #02 in the list of 18 small relation algebras.

(**a**)**1**    2 Mandatory: 1'1'1' 1'aa —  
 1 Forbidden: — — aaa

;	a
a	1'

$|D_2| = 1$   
 $|D_3| = 0$   
 $|D_4| = 0$   
 No diversity 4x4s !  
 $B_5$  is a basis  
 $B_6$  is a basis

The automorphism group of (**a**)**1** is  $\{()\}$ .

$\mathfrak{M}_2 \subseteq \mathfrak{R}_e(2)$ . #4 in the list of 18 small relation algebras.

(**a**)**1**     $\{2\}$      $Z_2$

(**a**)**2**    3 Mandatory: 1'1'1' 1'aa aaa  
 0 Forbidden: — — —

;	a
a	1'a

$|D_2| = 1$   
 $|D_3| = 1$   
 $|D_4| = 1$   
 $B_5$  is a basis  
 $B_6$  is a basis

The automorphism group of (**a**)**2** is  $\{()\}$ .

$\mathfrak{M}_3 \subseteq \mathfrak{R}_e(2)$ . #5 in the list of 18 small relation algebras.

(a)2	{2, 3, 4, 5}	$Z_5$	
(a)2	{2, 3}	$Z_3$	
(a)2	{2, 3, 4}	$Z_4$	
(a)2	{2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10, 11, 12, 13}	$Z_{13}$	
(a)2	{2, 3, 4, 5, 6, 7, 8}		$Z_8$
(a)2	{2, 3, 4, 5, 6, 7}	$Z_7$	
(a)2	{2, 3, 4, 5, 6}	$Z_2 \times Z_3$	
(a)2	{2, 3, 4}	$Z_2^2$	
(a)2	{2, 3, 4, 5, 6}	$S_3$	
(a)2	{2, 3, 4, 5, 6, 7, 8}	$D_8$	
(a)2	{2, 3, 4, 5, 6, 7, 8}	$Q_8$	
(a)2	{2, 3, 4, 5, 6, 7, 8}	$Z_2 \times Z_4$	
(a)2	{2, 3, 4, 5, 6, 7, 8}	$Z_2^3$	
(a)2	{2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9}	$Z_3 \times Z_3$	
(a)2	{2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9}	$Z_9$	
(a)2	{2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10}	$D_{10}$	
(a)2	{2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10}	$Z_2 \times Z_5$	
(a)2	{2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10, 11}	$Z_{11}$	
(a)2	{2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10, 11, 12}	$A_4$	
(a)2	{2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10, 11, 12}	$D_{12}$	
(a)2	{2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10, 11, 12}	$Z_2^2 \times Z_3$	
(a)2	{2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10, 11, 12}	$Z_3 s Z_4$	
(a)2	{2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10, 11, 12}	$Z_{12}$	

---

(a $\check{a}$ )1    4 Mandatory: 1'1'1' 1'aa a1'a — aa $\check{a}$   
 1 Forbidden: — — — aaa —

;	a	$\check{a}$
a	$\check{a}$	1'
$\check{a}$	1'	a

$ D_2  = 2$
$ D_3  = 1$
$ D_4  = 0$
No diversity 4x4s !
$B_5$ is a basis
$B_6$ is a basis

$$(a\check{a})1 \cong \supseteq (a)2(a\check{a})$$

The automorphism group of (a $\check{a}$ )1 is  $\{(), (a\check{a})\}$ .  
 #9 in the list of 18 small relation algebras.

$$(a\check{a})1 \quad \{2\} \quad \{3\} \quad Z_3$$

---

(a $\check{a}$ )2    4 Mandatory: 1'1'1' 1'aa a1'a aaa —  
 1 Forbidden: — — — aa $\check{a}$

;	a	$\check{a}$
a	a	1'a $\check{a}$
$\check{a}$	1'a $\check{a}$	$\check{a}$

$ D_2  = 2$
$ D_3  = 1$
$ D_4  = 1$
$B_5$ is a basis
$B_6$ is a basis

$$(a\check{a})2 \cong_{|\supseteq} (a)2(a\check{a})$$

The automorphism group of  $(a\check{a})2$  is  $\{(), (a\check{a})\}$ .

#10 in the list of 18 small relation algebras. The linear relation algebra  $\mathcal{L}$ . It is in  $\infty$ RRA but not  $f$ RRA.

$(a\check{a})3$     5 Mandatory:  $1'1'1' \quad 1'aa \quad a1'a \quad aaa \quad aa\check{a}$   
 0 Forbidden: — — — — —

$;$	$a$	$\check{a}$
$a$	$a\check{a}$	$1'a\check{a}$
$\check{a}$	$1'a\check{a}$	$a\check{a}$

$ D_2  = 2$
$ D_3  = 2$
$ D_4  = 4$
$B_5$ is a basis
$B_6$ is a basis

$$(a\check{a})3 \cong_{|\supseteq} (a)2(a\check{a})$$

The automorphism group of  $(a\check{a})3$  is  $\{(), (a\check{a})\}$ .

#11 in the list of 18 small relation algebras.  $\subseteq \mathfrak{Cm}(\mathbb{Z}_7)$ .

$(a\check{a})3$	$\{2, 3, 4, 5, 7\}$	$\{6, 8, 9, 10, 11\}$	$Z_{11}$
$(a\check{a})3$	$\{2, 3, 4, 6, 8\}$	$\{5, 7, 9, 10, 11\}$	$Z_{11}$
$(a\check{a})3$	$\{2, 3, 4, 7\}$	$\{5, 6, 8, 9\}$	$Z_9$
$(a\check{a})3$	$\{2, 4, 5, 6, 10\}$	$\{3, 7, 8, 9, 11\}$	$Z_{11}$
$(a\check{a})3$	$\{2, 3, 4, 5, 6, 8\}$	$\{7, 9, 10, 11, 12, 13\}$	$Z_{13}$
$(a\check{a})3$	$\{2, 3, 4, 5, 7, 9\}$	$\{6, 8, 10, 11, 12, 13\}$	$Z_{13}$
$(a\check{a})3$	$\{2, 3, 4, 5, 8, 9\}$	$\{6, 7, 10, 11, 12, 13\}$	$Z_{13}$
$(a\check{a})3$	$\{2, 3, 4, 6, 7, 10\}$	$\{5, 8, 9, 11, 12, 13\}$	$Z_{13}$
$(a\check{a})3$	$\{2, 3, 4, 6, 8, 10\}$	$\{5, 7, 9, 11, 12, 13\}$	$Z_{13}$
$(a\check{a})3$	$\{2, 3, 4, 7, 9, 10\}$	$\{5, 6, 8, 11, 12, 13\}$	$Z_{13}$
$(a\check{a})3$	$\{2, 3, 5, 6, 7, 11\}$	$\{4, 8, 9, 10, 12, 13\}$	$Z_{13}$
$(a\check{a})3$	$\{2, 3, 5, 6, 8, 11\}$	$\{4, 7, 9, 10, 12, 13\}$	$Z_{13}$
$(a\check{a})3$	$\{2, 3, 5, 7, 9, 11\}$	$\{4, 6, 8, 10, 12, 13\}$	$Z_{13}$
$(a\check{a})3$	$\{2, 3, 5, 8, 9, 11\}$	$\{4, 6, 7, 10, 12, 13\}$	$Z_{13}$
$(a\check{a})3$	$\{2, 3, 5\}$	$\{4, 6, 7\}$	$Z_7$
$(a\check{a})3$	$\{2, 3, 6, 8, 10, 11\}$	$\{4, 5, 7, 9, 12, 13\}$	$Z_{13}$
$(a\check{a})3$	$\{2, 3, 7, 9, 10, 11\}$	$\{4, 5, 6, 8, 12, 13\}$	$Z_{13}$
$(a\check{a})3$	$\{2, 3, 8, 9, 10, 11\}$	$\{4, 5, 6, 7, 12, 13\}$	$Z_{13}$
$(a\check{a})3$	$\{2, 4, 5, 6, 7, 12\}$	$\{3, 8, 9, 10, 11, 13\}$	$Z_{13}$
$(a\check{a})3$	$\{2, 4, 5, 6, 8, 12\}$	$\{3, 7, 9, 10, 11, 13\}$	$Z_{13}$
$(a\check{a})3$	$\{2, 4, 5, 7, 9, 12\}$	$\{3, 6, 8, 10, 11, 13\}$	$Z_{13}$
$(a\check{a})3$	$\{2, 4, 5, 8, 9, 12\}$	$\{3, 6, 7, 10, 11, 13\}$	$Z_{13}$
$(a\check{a})3$	$\{2, 4, 6, 7, 10, 12\}$	$\{3, 5, 8, 9, 11, 13\}$	$Z_{13}$
$(a\check{a})3$	$\{2, 4, 8, 9, 10, 12\}$	$\{3, 5, 6, 7, 11, 13\}$	$Z_{13}$
$(a\check{a})3$	$\{2, 5, 6, 7, 11, 12\}$	$\{3, 4, 8, 9, 10, 13\}$	$Z_{13}$
$(a\check{a})3$	$\{2, 5, 6, 8, 11, 12\}$	$\{3, 4, 7, 9, 10, 13\}$	$Z_{13}$
$(a\check{a})3$	$\{2, 5, 7, 9, 11, 12\}$	$\{3, 4, 6, 8, 10, 13\}$	$Z_{13}$
$(a\check{a})3$	$\{2, 6, 7, 10, 11, 12\}$	$\{3, 4, 5, 8, 9, 13\}$	$Z_{13}$
$(a\check{a})3$	$\{2, 6, 8, 10, 11, 12\}$	$\{3, 4, 5, 7, 9, 13\}$	$Z_{13}$
$(a\check{a})3$	$\{2, 7, 9, 10, 11, 12\}$	$\{3, 4, 5, 6, 8, 13\}$	$Z_{13}$
$(a\check{a})3$	$\{2, 8, 9, 10, 11, 12\}$	$\{3, 4, 5, 6, 7, 13\}$	$Z_{13}$

---

$(ab)1$     4 Mandatory:  $1'1'1'1'1'aa1'bb - abb - -$   
3 Forbidden:  $- - - aab - bbb aaa$

$;$	$a$	$b$
$a$	$1'$	$b$
$b$	$b$	$1'a$

$ D_2  = 2$
$ D_3  = 1$
$ D_4  = 1$
$B_5$ is a basis
$B_6$ is a basis

$$(ab)1 \cong_{\supseteq} (a)2(ab)$$

The automorphism group of  $(ab)1$  is  $\{()\}$ .  
#12 in the list of 18 small relation algebras.  $\subseteq \mathfrak{Cm}(\mathbb{Z}_2^2)$ .

$(ab)1$	$\{3\}$	$\{2, 4\}$	$Z_4$
$(ab)1$	$\{2\}$	$\{3, 4\}$	$Z_2^2$

$(ab)2$     5 Mandatory:  $1'1'1'1'1'aa1'bb - abb - aaa$   
 2 Forbidden:  $- - - aab - bbb -$

;	$a$	$b$
$a$	$1'a$	$b$
$b$	$b$	$1'a$

$ D_2  = 2$
$ D_3  = 2$
$ D_4  = 3$
$B_5$ is a basis
$B_6$ is a basis

$$(ab)2 \cong |\supseteq (a)2(ab)$$

The automorphism group of  $(ab)2$  is  $\{()\}$ .

#13 in the list of 18 small relation algebras.  $\subseteq (abc)11$  via  $a \rightarrow a + b, b \rightarrow b$ .

$(ab)2$	$\{3, 4, 7\}$	$\{2, 5, 6, 8\}$		$Z_8$
$(ab)2$	$\{3, 5\}$	$\{2, 4, 6\}$		$Z_2 \times Z_3$
$(ab)2$	$\{2, 3, 4\}$	$\{5, 6, 7, 8\}$		$Q_8$
$(ab)2$	$\{2, 4, 6\}$	$\{3, 5, 7, 8\}$		$Z_2 \times Z_4$
$(ab)2$	$\{3, 4, 7\}$	$\{2, 5, 6, 8\}$		$D_8$
$(ab)2$	$\{3, 4, 7, 8, 11\}$	$\{2, 5, 6, 9, 10, 12\}$		$D_{12}$
$(ab)2$	$\{3, 4, 7, 8, 11\}$	$\{2, 5, 6, 9, 10, 12\}$		$Z_{12}$
$(ab)2$	$\{3, 5, 7, 9\}$	$\{2, 4, 6, 8, 10\}$		$D_{10}$
$(ab)2$	$\{3, 5, 7, 9\}$	$\{2, 4, 6, 8, 10\}$		$Z_2 \times Z_5$
$(ab)2$	$\{3, 5, 7, 9, 11\}$	$\{2, 4, 6, 8, 10, 12\}$		$Z_3 s Z_4$
$(ab)2$	$\{4, 5\}$	$\{2, 3, 6\}$		$S_3$
$(ab)2$	$\{4, 5, 8\}$	$\{2, 3, 6, 7\}$		$D_8$
$(ab)2$	$\{4, 5, 8\}$	$\{2, 3, 6, 7\}$		$Z_2 \times Z_4$
$(ab)2$	$\{4, 5, 8, 9, 12\}$	$\{2, 3, 6, 7, 10, 11\}$		$D_{12}$
$(ab)2$	$\{4, 5, 8, 9, 12\}$	$\{2, 3, 6, 7, 10, 11\}$		$Z_2^2 \times Z_3$
$(ab)2$	$\{5, 6, 7\}$	$\{2, 3, 4, 8\}$		$Z_2^3$

$(ab)3$     5 Mandatory:  $1'1'1'1'1'aa1'bb - abb bbb -$   
 2 Forbidden:  $- - - aab - - - aaa$

;	$a$	$b$
$a$	$1'$	$b$
$b$	$b$	$1'ab$

$ D_2  = 2$
$ D_3  = 2$
$ D_4  = 3$
$B_5$ is a basis
$B_6$ is a basis

$$(ab)3 \cong |\supseteq (a)2(ab)$$

The automorphism group of  $(ab)3$  is  $\{()\}$ .

#14 in the list of 18 small relation algebras.  $\subseteq (abc)11$  via  $a \rightarrow a, b \rightarrow b + c$ .

$(ab)3$	$\{4\}$	$\{2, 3, 5, 6, 7, 8\}$	$Z_8$
$(ab)3$	$\{4\}$	$\{2, 3, 5, 6\}$	$Z_2 \times Z_3$
$(ab)3$	$\{12\}$	$\{2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10, 11\}$	$A_4$
$(ab)3$	$\{2\}$	$\{3, 4, 5, 6\}$	$S_3$
$(ab)3$	$\{2\}$	$\{3, 4, 5, 6, 7, 8\}$	$D_8$
$(ab)3$	$\{2\}$	$\{3, 4, 5, 6, 7, 8\}$	$Z_2 \times Z_4$
$(ab)3$	$\{2\}$	$\{3, 4, 5, 6, 7, 8\}$	$Z_2^3$
$(ab)3$	$\{2\}$	$\{3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10\}$	$D_{10}$
$(ab)3$	$\{2\}$	$\{3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10, 11, 12\}$	$D_{12}$
$(ab)3$	$\{2\}$	$\{3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10, 11, 12\}$	$Z_2^2 \times Z_3$
$(ab)3$	$\{3\}$	$\{2, 4, 5, 6, 7, 8\}$	$Q_8$
$(ab)3$	$\{3\}$	$\{2, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10, 11, 12\}$	$Z_3 s Z_4$
$(ab)3$	$\{4\}$	$\{2, 3, 5, 6, 7, 8\}$	$D_8$
$(ab)3$	$\{4\}$	$\{2, 3, 5, 6, 7, 8\}$	$Z_2 \times Z_4$
$(ab)3$	$\{6\}$	$\{2, 3, 4, 5, 7, 8, 9, 10\}$	$Z_2 \times Z_5$
$(ab)3$	$\{7\}$	$\{2, 3, 4, 5, 6, 8, 9, 10, 11, 12\}$	$D_{12}$
$(ab)3$	$\{7\}$	$\{2, 3, 4, 5, 6, 8, 9, 10, 11, 12\}$	$Z_{12}$

$(ab)4$  6 Mandatory:  $1'1'1' 1'aa 1'bb \text{ --- } abb \text{ bbb } aaa$   
 1 Forbidden:  $\text{--- } \text{--- } \text{--- } aab \text{ --- } \text{--- } \text{---}$

$;$	$a$	$b$
$a$	$1'a$	$b$
$b$	$b$	$1'ab$

$ D_2  = 2$
$ D_3  = 3$
$ D_4  = 5$
$B_5$ is a basis
$B_6$ is a basis

$$(ab)4 \cong |\supseteq (a)2(ab)$$

The automorphism group of  $(ab)4$  is  $\{()\}$ .

#15 in the list of 18 small relation algebras.  $\subseteq \mathbf{IA}$  via  $a = f + \check{f}$  and  $b = \rho + \check{\rho}$ .

$(ab)4$	$\{2, 3\}$	$\{4, 5, 6, 7, 8, 9, 10, 11, 12\}$	$A_4$
$(ab)4$	$\{2, 3, 4\}$	$\{5, 6, 7, 8, 9, 10, 11, 12\}$	$Z_3 s Z_4$
$(ab)4$	$\{2, 3, 5\}$	$\{4, 6, 7, 8, 9, 10, 11, 12\}$	$Z_2^2 \times Z_3$
$(ab)4$	$\{3, 6\}$	$\{2, 4, 5, 7, 8, 9\}$	$Z_9$
$(ab)4$	$\{4, 8\}$	$\{2, 3, 5, 6, 7, 9, 10, 11, 12\}$	$D_{12}$
$(ab)4$	$\{4, 8\}$	$\{2, 3, 5, 6, 7, 9, 10, 11, 12\}$	$Z_2^2 \times Z_3$
$(ab)4$	$\{4, 8\}$	$\{2, 3, 5, 6, 7, 9, 10, 11, 12\}$	$Z_{12}$
$(ab)4$	$\{4, 9, 12\}$	$\{2, 3, 5, 6, 7, 8, 10, 11\}$	$A_4$
$(ab)4$	$\{5, 7, 10\}$	$\{2, 3, 4, 6, 8, 9, 11, 12\}$	$Z_{12}$
$(ab)4$	$\{5, 9\}$	$\{2, 3, 4, 6, 7, 8, 10, 11, 12\}$	$Z_3 s Z_4$
$(ab)4$	$\{6, 7, 12\}$	$\{2, 3, 4, 5, 8, 9, 10, 11\}$	$D_{12}$
$(ab)4$	$\{7, 8\}$	$\{2, 3, 4, 5, 6, 9\}$	$Z_3 \times Z_3$

(ab)5 5 Mandatory: 1'1'1' 1'aa 1'bb aab abb — —  
 2 Forbidden: — — — — bbb aaa

;	a	b
a	1'b	ab
b	ab	1'a

$B_6$  is a basis

$ D_2  = 2$
$ D_3  = 2$
$ D_4  = 3$
$ 4 \times 4\text{'s in maximum proper 5DB}  = 1$

$$(ab)5 \cong | \supseteq (a)2(ab)$$

The automorphism group of (ab)5 is  $\{(), (ab)\}$ .

Forbidden minors of the maximum 5-dimensional basis:

$$\begin{matrix} a_{01} & a_{02} & b_{03} & b_{12} & a_{13} & a_{23} \\ a_{01} & b_{02} & b_{03} & b_{12} & b_{13} & a_{23} \end{matrix}$$

#16 in the list of 18 small relation algebras.

$$(ab)5 \quad \{2, 5\} \quad \{3, 4\} \quad Z_5$$

(ab)6 6 Mandatory: 1'1'1' 1'aa 1'bb aab abb — aaa  
 1 Forbidden: — — — — bbb —

;	a	b
a	1'ab	ab
b	ab	1'a

$ D_2  = 2$
$ D_3  = 3$
$ D_4  = 7$
$B_5$ is a basis
$B_6$ is a basis

$$(ab)6 \cong | \supseteq (a)2(ab)$$

The automorphism group of (ab)6 is  $\{()\}$ .

#17 in the list of 18 small relation algebras.

(ab)6	{2, 3, 4, 6, 9, 11, 12, 13}	{5, 7, 8, 10}	$Z_{13}$
(ab)6	{2, 3, 7, 8}	{4, 5, 6}	$Z_8$
(ab)6	{2, 5, 6, 7, 8, 9, 10, 13}	{3, 4, 11, 12}	$Z_{13}$
(ab)6	{2, 6, 9, 13}	{3, 4, 5, 7, 8, 10, 11, 12}	$Z_{13}$
(ab)6	{2, 3, 4, 5, 6, 8, 11}	{7, 9, 10, 12}	$D_{12}$
(ab)6	{2, 3, 4, 5, 6, 8, 9}	{7, 10, 11, 12}	$Z_3 s Z_4$
(ab)6	{2, 3, 4, 9, 10, 11}	{5, 6, 7, 8}	$Z_{11}$
(ab)6	{2, 3, 5, 7}	{4, 6, 8}	$D_8$
(ab)6	{2, 4, 6, 7, 8, 9, 12}	{3, 5, 10, 11}	$Z_{12}$
(ab)6	{4, 5, 6, 7, 8, 10, 11}	{2, 3, 9, 12}	$Z_2^2 \times Z_3$
(ab)6	{4, 5, 6, 7, 8, 10, 12}	{2, 3, 9, 11}	$D_{12}$

(ab)7 7 Mandatory: 1'1'1' 1'aa 1'bb aab abb bbb aaa  
 0 Forbidden: — — — — — — —

;	$a$	$b$
$a$	$1'ab$	$ab$
$b$	$ab$	$1'ab$

$ D_2  = 2$
$ D_3  = 4$
$ D_4  = 11$
$B_5$ is a basis
$B_6$ is a basis

$$(ab)7 \cong |\supseteq (a)2(ab)$$

The automorphism group of  $(ab)7$  is  $\{(), (ab)\}$ .  
 #18 in the list of 18 small relation algebras.

$(ab)7$	$\{2, 3, 5, 10, 12, 13\}$	$\{4, 6, 7, 8, 9, 11\}$	$Z_{13}$
$(ab)7$	$\{2, 3, 7, 8, 12, 13\}$	$\{4, 5, 6, 9, 10, 11\}$	$Z_{13}$
$(ab)7$	$\{2, 4, 5, 10, 11, 13\}$	$\{3, 6, 7, 8, 9, 12\}$	$Z_{13}$
$(ab)7$	$\{2, 4, 7, 8, 11, 13\}$	$\{3, 5, 6, 9, 10, 12\}$	$Z_{13}$
$(ab)7$	$\{2, 3, 4, 5, 8\}$	$\{6, 7, 9, 10, 11, 12\}$	$Z_2^2 \times Z_3$
$(ab)7$	$\{2, 3, 4, 5, 9\}$	$\{6, 7, 8, 10, 11, 12\}$	$Z_3 \times Z_4$
$(ab)7$	$\{2, 3, 4, 6\}$	$\{5, 7, 8, 9\}$	$Z_3 \times Z_3$
$(ab)7$	$\{2, 3, 4, 9, 12\}$	$\{5, 6, 7, 8, 10, 11\}$	$A_4$
$(ab)7$	$\{2, 3, 5, 9, 10, 11\}$	$\{4, 6, 7, 8, 12\}$	$D_{12}$
$(ab)7$	$\{2, 3, 6, 9, 11, 12\}$	$\{4, 5, 7, 8, 10\}$	$Z_{12}$

---

$(abb)1$  5 Mandatory:  $b1'b$  — — — —  $bba$  — —  
 6 Forbidden: —  $bbb$   $aba$   $abb$   $bab$  —  $bb\check{b}$   $aaa$

;	$a$	$b$	$\check{b}$
$a$	$1'$	$\check{b}$	$b$
$b$	$\check{b}$	$a$	$1'$
$\check{b}$	$b$	$1'$	$a$

$ D_2  = 3$
$ D_3  = 1$
$ D_4  = 1$
$B_5$ is a basis
$B_6$ is a basis

$$(abb)1 \cong |\supseteq (a)2(abb)$$

$$(ab)1(a, b\check{b})$$

The automorphism group of  $(abb)1$  is  $\{(), (b\check{b})\}$ .  
 $\subseteq \mathbf{Cm}(Z_4)$ .

$$1' \rightarrow 0, b \rightarrow 1, a \rightarrow 2, \check{b} \rightarrow -1 = 3.$$

$$(abb)1 \quad \{3\} \quad \{2\} \quad \{4\} \quad Z_4$$

---

$(abb)2$  7 Mandatory:  $b1'b$  — —  $abb$   $bab$  —  $bb\check{b}$  —  
 4 Forbidden: —  $bbb$   $aba$  — —  $bba$  —  $aaa$



;	$a$	$b$	$\check{b}$
$a$	$1'$	$b$	$\check{b}$
$b$	$b$	$\check{b}$	$1'a$
$\check{b}$	$\check{b}$	$1'a$	$b$

$ D_2  = 3$
$ D_3  = 3$
$ D_4  = 2$
$B_5$ is a basis
$B_6$ is a basis

$$(abb)2 \cong |\supseteq (a)2(ab\check{b})$$

$$(ab)3(a, b\check{b})$$

The automorphism group of  $(abb)2$  is  $\{(), (b\check{b})\}$ .  
 $\subseteq \mathbf{Cm}(\mathbb{Z}_6)$ .  
 $1' \rightarrow 0, b \rightarrow 1 + 4, a \rightarrow 3, \check{b} \rightarrow 2 + 5$ .

$$(abb)2 \quad \{4\} \quad \{2, 5\} \quad \{3, 6\} \quad Z_2 \times Z_3$$

$(abb)3$     8 Mandatory:  $b1'b \text{ --- } abb \text{ } bab \text{ --- } bb\check{b} \text{ } aaa$   
 3 Forbidden:  $\text{--- } bbb \text{ } aba \text{ --- } \text{--- } bba \text{ --- } \text{---}$

;	$a$	$b$	$\check{b}$
$a$	$1'a$	$b$	$\check{b}$
$b$	$b$	$\check{b}$	$1'a$
$\check{b}$	$\check{b}$	$1'a$	$b$

$ D_2  = 3$
$ D_3  = 4$
$ D_4  = 5$
$B_5$ is a basis
$B_6$ is a basis

$$(abb)3 \cong |\supseteq (a)2(ab\check{b})$$

$$(ab)4(a, b\check{b})$$

The automorphism group of  $(abb)3$  is  $\{(), (b\check{b})\}$ .  
 $\subseteq \mathbf{Cm}(\mathbb{Z}_9)$ .  
 $1' \rightarrow 0, b \rightarrow 1, 4, 7, a \rightarrow 3, \check{b} \rightarrow 8, 5, 2$ .

$$(abb)3 \quad \{3, 6\} \quad \{2, 5, 8\} \quad \{4, 7, 9\} \quad Z_9$$

$$(abb)3 \quad \{7, 8\} \quad \{2, 3, 9\} \quad \{4, 5, 6\} \quad Z_3 \times Z_3$$

$(abb)4$     8 Mandatory:  $b1'b \text{ --- } abb \text{ } bab \text{ } bba \text{ --- } aaa$   
 3 Forbidden:  $\text{--- } bbb \text{ } aba \text{ --- } \text{--- } \text{--- } bb\check{b} \text{ ---}$

;	$a$	$b$	$\check{b}$
$a$	$1'a$	$b\check{b}$	$b\check{b}$
$b$	$b\check{b}$	$a$	$1'a$
$\check{b}$	$b\check{b}$	$1'a$	$a$

$ D_2  = 3$
$ D_3  = 4$
$ D_4  = 9$
$B_5$ is a basis
$B_6$ is a basis

$$(abb)4 \cong \supseteq (a)2(abb)$$

$$(ab)2(a, \check{b})$$

The automorphism group of  $(abb)4$  is  $\{(), (b\check{b})\}$ .  
*f*RRA by a probabilistic proof.

$(abb)5$     6 Mandatory:  $b1'b - aba - - - bb\check{b} -$   
              5 Forbidden:  $- bbb - abb\ b\check{a}b\ bba - aaa$

;	$a$	$b$	$\check{b}$
$a$	$1'b\check{b}$	$a$	$a$
$b$	$a$	$\check{b}$	$1'$
$\check{b}$	$a$	$1'$	$b$

$ D_2  = 3$
$ D_3  = 2$
$ D_4  = 2$
$B_5$ is a basis
$B_6$ is a basis

$$(abb)5 \cong \supseteq (a)2(abb)$$

$$(ab)2(b\check{b}, a)$$

The automorphism group of  $(abb)5$  is  $\{(), (b\check{b})\}$ .  
 $\subseteq \mathfrak{Cm}(\mathbb{Z}_6)$ :  $a \rightarrow 1, 3, 5, b \rightarrow 2, \check{b} \rightarrow 4$ .

$$(abb)5 \quad \{2, 3, 6\} \quad \{4\} \quad \{5\} \quad S_3$$

$$(abb)5 \quad \{2, 4, 6\} \quad \{3\} \quad \{5\} \quad Z_2 \times Z_3$$

$(abb)6$     7 Mandatory:  $b1'b - aba - - - bb\check{b}aaa$   
              4 Forbidden:  $- bbb - abb\ b\check{a}b\ bba - -$

;	$a$	$b$	$\check{b}$
$a$	$1'ab\check{b}$	$a$	$a$
$b$	$a$	$\check{b}$	$1'$
$\check{b}$	$a$	$1'$	$b$

$ D_2  = 3$
$ D_3  = 3$
$ D_4  = 4$
$B_5$ is a basis
$B_6$ is a basis

$$(abb)6 \cong \supseteq (a)2(abb)$$

$$(ab)4(b\check{b}, a)$$

The automorphism group of  $(abb)6$  is  $\{(), (bb)\}$ .

Representation:  $b \rightarrow \{ \langle 0, 1 \rangle, \langle 1, 2 \rangle, \langle 2, 1 \rangle \} = C, a \rightarrow$

$(C \times C') \cup (C' \times C'') \cup (C'' \times C)$  where  $C'$  and  $C''$  are copies of  $C$ . Make a picture.

$$\begin{array}{lllll} (abb)6 & \{2, 4, 5, 7, 8, 9\} & \{3\} & \{6\} & Z_9 \\ (abb)6 & \{3, 5, 6, 7, 8, 9\} & \{2\} & \{4\} & Z_3 \times Z_3 \end{array}$$

$(abb)7$  9 Mandatory:  $b1'b \text{ --- } aba \text{ } abb \text{ } bab \text{ } bba \text{ --- } aaa$   
 2 Forbidden:  $\text{--- } bbb \text{ --- } \text{--- } \text{--- } \text{--- } bbb \text{ ---}$

;	$a$	$b$	$\check{b}$
$a$	$1'abb$	$abb$	$abb$
$b$	$abb$	$a$	$1'a$
$\check{b}$	$abb$	$1'a$	$a$

$ D_2  = 3$
$ D_3  = 5$
$ D_4  = 18$
$B_5$ is a basis
$B_6$ is a basis

$$\begin{aligned} (abb)7 &\cong \supseteq (a)2(abb) \\ &(ab)6(a, b\check{b}) \end{aligned}$$

The automorphism group of  $(abb)7$  is  $\{(), (bb)\}$ .

$a$  is flexible.

$(abb)8$  9 Mandatory:  $b1'b \text{ --- } aba \text{ } abb \text{ } bab \text{ } bba \text{ } bb\check{b} \text{ ---}$   
 2 Forbidden:  $\text{--- } bbb \text{ --- } \text{--- } \text{--- } \text{--- } aaa$

;	$a$	$b$	$\check{b}$
$a$	$1'b\check{b}$	$abb$	$abb$
$b$	$abb$	$a\check{b}$	$1'a$
$\check{b}$	$abb$	$1'a$	$ab$

$J :$	$a_{01}$	$a_{02}$	$b_{21}$	$b_{03}$	$b_{31}$	$b_{24}$	$b_{43}$
$L :$	$a_{01}$	$a_{02}$	$b_{21}$	$b_{03}$	$b_{31}$	$\check{b}_{04}$	$b_{41}$
$M :$	$a_{01}$	$a_{02}$	$b_{21}$	$\check{b}_{03}$	$\check{b}_{32}$	$\check{b}_{24}$	$a_{41}$

$ D_2  = 3$
$ D_3  = 5$
$ D_4  = 13$
No 5DB

$$\begin{aligned} (abb)8 &\cong \supseteq (a)2(abb) \\ &(ab)6(b\check{b}, a) \end{aligned}$$

The automorphism group of  $(abb)8$  is  $\{(), (bb)\}$ .

$(abb)9$  10 Mandatory:  $b1'b \text{ --- } aba \text{ } abb \text{ } bab \text{ } bba \text{ } bb\check{b} \text{ } aaa$   
 1 Forbidden:  $\text{--- } bbb \text{ --- } \text{--- } \text{--- } \text{--- } \text{---}$

;	$a$	$b$	$\check{b}$
$a$	$1'abb$	$ab\check{b}$	$ab\check{b}$
$b$	$ab\check{b}$	$a\check{b}$	$1'a$
$\check{b}$	$ab\check{b}$	$1'a$	$ab$

$ D_2  = 3$
$ D_3  = 6$
$ D_4  = 22$
$B_5$ is a basis
$B_6$ is a basis

$$(ab\check{b})9 \cong |\supseteq (a)2(ab\check{b})$$

$$(ab)7(a, b\check{b})(b\check{b}, a)$$

The automorphism group of  $(ab\check{b})9$  is  $\{(), (b\check{b})\}$ .  
 $a$  is flexible.

$(ab\check{b})10$  7 Mandatory:  $b1'b\ bbb \text{ --- } bba\ b\check{b} \text{ ---}$   
 4 Forbidden:  $\text{--- } aba\ abb\ bab \text{ --- } aaa$

;	$a$	$b$	$\check{b}$
$a$	$1'$	$\check{b}$	$b$
$b$	$\check{b}$	$ab\check{b}$	$1'b\check{b}$
$\check{b}$	$b$	$1'b\check{b}$	$ab\check{b}$

$ D_2  = 3$
$ D_3  = 3$
$ D_4  = 7$
$B_5$ is a basis
$B_6$ is a basis

$$(ab\check{b})10 \cong |\supseteq (a)2(ab\check{b})$$

$$(ab)3(a, b\check{b})$$

The automorphism group of  $(ab\check{b})10$  is  $\{(), (b\check{b})\}$ .  
 $\infty$ RRA (Hertzel).

$$(ab\check{b})10 \quad \{3\} \quad \{2, 5, 6\} \quad \{4, 7, 8\} \quad Q_8$$

$(ab\check{b})11$  7 Mandatory:  $b1'b\ bbb \text{ --- } abb\ bab \text{ --- } \text{---}$   
 4 Forbidden:  $\text{--- } aba \text{ --- } bba\ b\check{b}\ aaa$

;	$a$	$b$	$\check{b}$
$a$	$1'$	$b$	$\check{b}$
$b$	$b$	$b$	$1'ab\check{b}$
$\check{b}$	$\check{b}$	$1'ab\check{b}$	$\check{b}$

$ D_2  = 3$
$ D_3  = 3$
$ D_4  = 5$
$B_5$ is a basis
$B_6$ is a basis

$$(abb)11 \cong \supseteq (a)2(ab\check{b}) \\ (ab)3(a, b\check{b})$$

The automorphism group of  $(abb)11$  is  $\{(), (b\check{b})\}$ .  
 $\infty$ RRA (Hertzel).

$(ab\check{b})12$  8 Mandatory:  $b1' b bbb \text{ --- } abb bab \text{ --- } \text{--- } aaa$   
 3 Forbidden:  $\text{--- } \text{--- } aba \text{ --- } \text{--- } bba b\check{b} \text{ ---}$

;	$a$	$b$	$\check{b}$
$a$	$1'a$	$b$	$\check{b}$
$b$	$b$	$b$	$1'ab\check{b}$
$\check{b}$	$\check{b}$	$1'ab\check{b}$	$\check{b}$

$ D_2  = 3$
$ D_3  = 4$
$ D_4  = 8$
$B_5$ is a basis
$B_6$ is a basis

$$(ab\check{b})12 \cong \supseteq (a)2(ab\check{b}) \\ (ab)4(a, b\check{b})$$

The automorphism group of  $(ab\check{b})12$  is  $\{(), (b\check{b})\}$ .  
 $\infty$ RRA (Hertzel).  
 $\subseteq \mathbf{IA}$  via  $a = f + \check{f}$ ,  $b = pdoms$ .

$(ab\check{b})13$  8 Mandatory:  $b1' b bbb \text{ --- } abb bab \text{ --- } b\check{b}\check{b} \text{ ---}$   
 3 Forbidden:  $\text{--- } \text{--- } aba \text{ --- } \text{--- } bba \text{ --- } aaa$

;	$a$	$b$	$\check{b}$
$a$	$1'$	$b$	$\check{b}$
$b$	$b$	$b\check{b}$	$1'ab\check{b}$
$\check{b}$	$\check{b}$	$1'ab\check{b}$	$b\check{b}$

$ D_2  = 3$
$ D_3  = 4$
$ D_4  = 9$
$B_5$ is a basis
$B_6$ is a basis

$$(ab\check{b})13 \cong \supseteq (a)2(ab\check{b}) \\ (ab)3(a, b\check{b})$$

The automorphism group of  $(ab\check{b})13$  is  $\{(), (b\check{b})\}$ .  
 $\subseteq \mathbf{Cm}(\mathbb{Z}_{14})$ .

$(ab\check{b})14$  9 Mandatory:  $b1' b bbb \text{ --- } abb bab \text{ --- } b\check{b}\check{b} aaa$   
 2 Forbidden:  $\text{--- } \text{--- } aba \text{ --- } \text{--- } bba \text{ ---}$

;	$a$	$b$	$\check{b}$
$a$	$1'a$	$b$	$\check{b}$
$b$	$b$	$b\check{b}$	$1'abb$
$\check{b}$	$\check{b}$	$1'abb$	$b\check{b}$

$ D_2  = 3$
$ D_3  = 5$
$ D_4  = 12$
$B_5$ is a basis
$B_6$ is a basis

$$(abb)14 \cong |\supseteq (a)2(abb)$$

$$(ab)4(a, b\check{b})$$

The automorphism group of  $(abb)14$  is  $\{(), (b\check{b})\}$ .  
 $\subseteq \mathbf{Cm}(\mathbb{Z}_{21})$ .

$(abb)15$  9 Mandatory:  $b1'b\ bbb \text{ --- } abb\ bab\ bba \text{ --- } aaa$   
 2 Forbidden:  $\text{--- } \text{--- } aba \text{ --- } \text{--- } \text{--- } bbb \text{ ---}$

;	$a$	$b$	$\check{b}$
$a$	$1'a$	$b\check{b}$	$b\check{b}$
$b$	$b\check{b}$	$ab$	$1'abb$
$\check{b}$	$b\check{b}$	$1'abb$	$a\check{b}$

$J$ :	true.
$L$ :	true.
$M$ :	$b_{01} \ a_{02} \ \check{b}_{21} \ \check{b}_{03} \ \check{b}_{32} \ \check{b}_{24} \ \check{b}_{41}$

$ D_2  = 3$
$ D_3  = 5$
$ D_4  = 16$
No 5DB

$$(abb)15 \cong |\supseteq (a)2(abb)$$

$$(ab)4(a, b\check{b})$$

The automorphism group of  $(abb)15$  is  $\{(), (b\check{b})\}$ .

$(abb)16$  10 Mandatory:  $b1'b\ bbb \text{ --- } abb\ bab\ bba\ bbb\ aaa$   
 1 Forbidden:  $\text{--- } \text{--- } aba \text{ --- } \text{--- } \text{--- } \text{---}$

;	$a$	$b$	$\check{b}$
$a$	$1'a$	$b\check{b}$	$b\check{b}$
$b$	$b\check{b}$	$abb$	$1'abb$
$\check{b}$	$b\check{b}$	$1'abb$	$abb$

$ D_2  = 3$
$ D_3  = 6$
$ D_4  = 23$
$B_5$ is a basis
$B_6$ is a basis

$$(abb)16 \cong |\supseteq (a)2(abb)$$

$$(ab)4(a, \check{b}\check{b})$$

The automorphism group of  $(ab\check{b})16$  is  $\{(), (b\check{b})\}$ .

$(ab\check{b})17$     6 Mandatory:  $b1'b\check{b}bb\check{b}aba$  — — — — —  
 5 Forbidden: — — —  $abb\check{b}ab\check{b}bba\check{b}bb\check{b}aaa$

;	$a$	$b$	$\check{b}$
$a$	$1'b\check{b}$	$a$	$a$
$b$	$a$	$b$	$1'b\check{b}$
$\check{b}$	$a$	$1'b\check{b}$	$\check{b}$

$ D_2  = 3$
$ D_3  = 2$
$ D_4  = 3$
$B_5$ is a basis
$B_6$ is a basis

$$(ab\check{b})17 \cong | \supseteq (a)2(ab\check{b})$$

$$(ab)2(b\check{b}, a)$$

The automorphism group of  $(ab\check{b})17$  is  $\{(), (b\check{b})\}$ .

$(ab\check{b})18$     7 Mandatory:  $b1'b\check{b}bb\check{b}aba$  — — — —  $aaa$   
 4 Forbidden: — — —  $abb\check{b}ab\check{b}bba\check{b}bb\check{b}$  —

;	$a$	$b$	$\check{b}$
$a$	$1'abb\check{b}$	$a$	$a$
$b$	$a$	$b$	$1'b\check{b}$
$\check{b}$	$a$	$1'b\check{b}$	$\check{b}$

$ D_2  = 3$
$ D_3  = 3$
$ D_4  = 5$
$B_5$ is a basis
$B_6$ is a basis

$$(ab\check{b})18 \cong | \supseteq (a)2(ab\check{b})$$

$$(ab)4(b\check{b}, a)$$

The automorphism group of  $(ab\check{b})18$  is  $\{(), (b\check{b})\}$ .

$(ab\check{b})19$     7 Mandatory:  $b1'b\check{b}bb\check{b}aba$  — — —  $bb\check{b}$  —  
 4 Forbidden: — — —  $abb\check{b}ab\check{b}bba$  —  $aaa$

;	$a$	$b$	$\check{b}$
$a$	$1'b\check{b}$	$a$	$a$
$b$	$a$	$b\check{b}$	$1'b\check{b}$
$\check{b}$	$a$	$1'b\check{b}$	$b\check{b}$

$ D_2  = 3$
$ D_3  = 3$
$ D_4  = 7$
$B_5$ is a basis
$B_6$ is a basis

$$(abb)19 \cong |\supseteq (a)2(abb) \\ (ab)2(\check{b}\check{b}, a)$$

The automorphism group of  $(abb)19$  is  $\{(), (\check{b}\check{b})\}$ .

$(abb)20$  8 Mandatory:  $b1'b\check{b}\check{b}\check{b}aba$  — — —  $\check{b}\check{b}\check{b}aaa$   
 3 Forbidden: — — —  $abb\check{b}\check{a}\check{b}bba$  — —

;	$a$	$b$	$\check{b}$
$a$	$1'a\check{b}\check{b}$	$a$	$a$
$b$	$a$	$\check{b}\check{b}$	$1'\check{b}\check{b}$
$\check{b}$	$a$	$1'\check{b}\check{b}$	$\check{b}\check{b}$

$ D_2  = 3$
$ D_3  = 4$
$ D_4  = 9$
$B_5$ is a basis
$B_6$ is a basis

$$(abb)20 \cong |\supseteq (a)2(abb) \\ (ab)4(\check{b}\check{b}, a)$$

The automorphism group of  $(abb)20$  is  $\{(), (\check{b}\check{b})\}$ .

$(abb)21$  7 Mandatory:  $b1'b\check{b}\check{b}\check{b}aba$  — —  $bba$  — —  
 4 Forbidden: — — —  $abb\check{b}\check{a}\check{b}$  —  $\check{b}\check{b}\check{b}aaa$

;	$a$	$b$	$\check{b}$
$a$	$1'\check{b}\check{b}$	$a\check{b}$	$ab$
$b$	$a\check{b}$	$ab$	$1'\check{b}\check{b}$
$\check{b}$	$ab$	$1'\check{b}\check{b}$	$a\check{b}$

$ D_2  = 3$
$ D_3  = 3$
$ D_4  = 8$
$B_5$ is a basis
$B_6$ is a basis

$$(abb)21 \cong |\supseteq (a)2(abb) \\ (ab)6(\check{b}\check{b}, a)$$

The automorphism group of  $(abb)21$  is  $\{(), (\check{b}\check{b})\}$ .

$(abb)22$  8 Mandatory:  $b1'b\check{b}\check{b}\check{b}aba$  — —  $bba$  —  $aaa$   
 3 Forbidden: — — —  $abb\check{b}\check{a}\check{b}$  —  $\check{b}\check{b}$  —

;	$a$	$b$	$\check{b}$
$a$	$1'a\check{b}\check{b}$	$a\check{b}$	$ab$
$b$	$a\check{b}$	$ab$	$1'\check{b}\check{b}$
$\check{b}$	$ab$	$1'\check{b}\check{b}$	$a\check{b}$



$J$ :	true.
$L$ :	true.
$M$ :	$a_{01} \ a_{02} \ a_{21} \ b_{03} \ b_{32} \ \check{b}_{24} \ \check{b}_{41}$

$ D_2  = 3$
$ D_3  = 4$
$ D_4  = 11$
No 5DB

$$(abb)22 \cong | \supseteq (a)2(abb)$$

$$(ab)7(a, \check{b}\check{b})(\check{b}\check{b}, a)$$

The automorphism group of  $(abb)22$  is  $\{(), (\check{b}\check{b})\}$ .

$(abb)23$     8 Mandatory:  $b1'b \ bbb \ aba \ \text{---} \ \text{---} \ bba \ bb\check{b} \ \text{---}$   
 3 Forbidden:  $\text{---} \ \text{---} \ \text{---} \ abb \ b\check{a}\check{b} \ \text{---} \ \text{---} \ aaa$

;	$a$	$b$	$\check{b}$
$a$	$1'b\check{b}$	$a\check{b}$	$ab$
$b$	$a\check{b}$	$abb$	$1'b\check{b}$
$\check{b}$	$ab$	$1'b\check{b}$	$abb$

$J$ :	$b_{01} \ a_{02} \ a_{21} \ a_{03} \ \check{b}_{31} \ b_{24} \ b_{43}$
$L$ :	$b_{01} \ a_{02} \ a_{21} \ a_{03} \ \check{b}_{31} \ \check{b}_{04} \ \check{b}_{41}$
$M$ :	$b_{01} \ \check{b}_{02} \ \check{b}_{21} \ a_{03} \ a_{32} \ a_{24} \ b_{41}$

$ D_2  = 3$
$ D_3  = 4$
$ D_4  = 13$
No 5DB

$$(abb)23 \cong | \supseteq (a)2(abb)$$

$$(ab)6(\check{b}\check{b}, a)$$

The automorphism group of  $(abb)23$  is  $\{(), (\check{b}\check{b})\}$ .

$(abb)24$     9 Mandatory:  $b1'b \ bbb \ aba \ \text{---} \ \text{---} \ bba \ bb\check{b} \ aaa$   
 2 Forbidden:  $\text{---} \ \text{---} \ \text{---} \ abb \ b\check{a}\check{b} \ \text{---} \ \text{---} \ \text{---}$

;	$a$	$b$	$\check{b}$
$a$	$1'abb$	$a\check{b}$	$ab$
$b$	$a\check{b}$	$abb$	$1'b\check{b}$
$\check{b}$	$ab$	$1'b\check{b}$	$abb$

$J$ :	$b_{01} \ a_{02} \ a_{21} \ a_{03} \ \check{b}_{31} \ b_{24} \ b_{43}$
$L$ :	true.
$M$ :	$a_{01} \ a_{02} \ a_{21} \ b_{03} \ b_{32} \ \check{b}_{24} \ \check{b}_{41}$

$ D_2  = 3$
$ D_3  = 5$
$ D_4  = 16$
No 5DB

$$(abb)24 \cong | \supseteq (a)2(abb) \\ (ab)7(a, \check{b})(\check{b}\check{b}, a)$$

The automorphism group of  $(abb)24$  is  $\{(), (\check{b}\check{b})\}$ .

$(abb)25$  8 Mandatory:  $b1'b bbb aba - bab - - aaa$   
3 Forbidden:  $- - - abb - bba \check{b}\check{b} -$

;	$a$	$b$	$\check{b}$
$a$	$1'abb$	$a$	$a\check{b}$
$b$	$ab$	$b$	$1'\check{b}\check{b}$
$\check{b}$	$a$	$1'abb$	$\check{b}$

$ D_2  = 3$
$ D_3  = 4$
$ D_4  = 9$
$B_5$ is a basis
$B_6$ is a basis

$$(abb)25 \cong | \supseteq (a)2(abb)$$

The automorphism group of  $(abb)25$  is  $\{()\}$ .

No nontrivial subalgebras.

$\infty$ RRA via branching  $\mathbb{Q}$ . Not finitely representable since  $b; b = b$ .

$(abb)26$  8 Mandatory:  $b1'b bbb aba - bab bba - -$   
3 Forbidden:  $- - - abb - - \check{b}\check{b} aaa$

;	$a$	$b$	$\check{b}$
$a$	$1'\check{b}\check{b}$	$a\check{b}$	$abb$
$b$	$abb$	$ab$	$1'\check{b}\check{b}$
$\check{b}$	$ab$	$1'abb$	$a\check{b}$

$J$ :	$b_{01}$	$a_{02}$	$a_{21}$	$a_{03}$	$\check{b}_{31}$	$a_{24}$	$\check{b}_{43}$
$L$ :	$b_{01}$	$a_{02}$	$a_{21}$	$a_{03}$	$\check{b}_{31}$	$b_{04}$	$a_{41}$
$M$ :	$a_{01}$	$\check{b}_{02}$	$b_{21}$	$a_{03}$	$a_{32}$	$a_{24}$	$a_{41}$

$ D_2  = 3$
$ D_3  = 4$
$ D_4  = 13$
No 5DB

$$(abb)26 \cong | \supseteq (a)2(abb) \\ (ab)6(\check{b}\check{b}, a)$$

The automorphism group of  $(abb)26$  is  $\{()\}$ .

$(abb)27$  9 Mandatory:  $b1'b bbb aba - bab bba - aaa$   
2 Forbidden:  $- - - abb - - \check{b}\check{b} -$

;	$a$	$b$	$\check{b}$
$a$	$1'abb$	$a\check{b}$	$ab\check{b}$
$b$	$ab\check{b}$	$ab$	$1'b\check{b}$
$\check{b}$	$ab$	$1'abb$	$a\check{b}$

$ D_2  = 3$
$ D_3  = 5$
$ D_4  = 19$
No 5DB

$$(abb)27 \cong |\supseteq (a)2(abb)$$

$$(ab)7(a, b\check{b})(b\check{b}, a)$$

The automorphism group of  $(abb)27$  is  $\{()\}$ .

$(abb)28$     9 Mandatory:  $b1'b bbb aba$  —  $bab bba bb\check{b}$  —  
 2 Forbidden: — — —  $abb$  — — —  $aaa$

;	$a$	$b$	$\check{b}$
$a$	$1'b\check{b}$	$a\check{b}$	$ab\check{b}$
$b$	$ab\check{b}$	$ab\check{b}$	$1'b\check{b}$
$\check{b}$	$ab$	$1'abb$	$ab\check{b}$

$J :$	$b_{01}$	$a_{02}$	$a_{21}$	$\check{b}_{03}$	$a_{31}$	$b_{24}$	$a_{43}$
$L :$	$b_{01}$	$a_{02}$	$a_{21}$	$a_{03}$	$\check{b}_{31}$	$b_{04}$	$a_{41}$
$M :$	$a_{01}$	$\check{b}_{02}$	$b_{21}$	$a_{03}$	$a_{32}$	$a_{24}$	$a_{41}$

$ D_2  = 3$
$ D_3  = 5$
$ D_4  = 20$
No 5DB

$$(abb)28 \cong |\supseteq (a)2(abb)$$

$$(ab)6(b\check{b}, a)$$

The automorphism group of  $(abb)28$  is  $\{()\}$ .

$(abb)29$     10 Mandatory:  $b1'b bbb aba$  —  $bab bba bb\check{b} aaa$   
 1 Forbidden: — — —  $abb$  — — — —

;	$a$	$b$	$\check{b}$
$a$	$1'abb$	$a\check{b}$	$ab\check{b}$
$b$	$ab\check{b}$	$ab\check{b}$	$1'b\check{b}$
$\check{b}$	$ab$	$1'abb$	$ab\check{b}$

$ D_2  = 3$
$ D_3  = 6$
$ D_4  = 26$
$B_5$ is a basis
$B_6$ is a basis

$$(abb)29 \cong |\supseteq (a)2(abb)$$

$$(ab)7(a, b\check{b})(b\check{b}, a)$$

The automorphism group of  $(abb)29$  is  $\{()\}$ .

$(abb)30$  8 Mandatory:  $b1'b\ bbb\ aba\ abb\ bab\ \text{---}\ \text{---}\ \text{---}$   
 3 Forbidden:  $\text{---}\ \text{---}\ \text{---}\ \text{---}\ \text{---}\ bba\ bb\check{b}\ aaa$

;	$a$	$b$	$\check{b}$
$a$	$1'b\check{b}$	$ab$	$a\check{b}$
$b$	$ab$	$b$	$1'abb$
$\check{b}$	$a\check{b}$	$1'abb$	$\check{b}$

$J$ :	$a_{01}$	$b_{02}$	$\check{b}_{21}$	$\check{b}_{03}$	$b_{31}$	$a_{24}$	$a_{43}$
$L$ :	true.						
$M$ :	$a_{01}$	$b_{02}$	$\check{b}_{21}$	$a_{03}$	$a_{32}$	$a_{24}$	$a_{41}$

$ D_2  = 3$
$ D_3  = 4$
$ D_4  = 10$
No 5DB

$$(abb)30 \cong |\supseteq (a)2(abb)$$

$$(ab)6(bb, a)$$

The automorphism group of  $(abb)30$  is  $\{(), (bb)\}$ .  
 McKenzie's algebra.

$(abb)31$  9 Mandatory:  $b1'b\ bbb\ aba\ abb\ bab\ \text{---}\ \text{---}\ aaa$   
 2 Forbidden:  $\text{---}\ \text{---}\ \text{---}\ \text{---}\ \text{---}\ bba\ bb\check{b}\ \text{---}$

;	$a$	$b$	$\check{b}$
$a$	$1'abb$	$ab$	$a\check{b}$
$b$	$ab$	$b$	$1'abb$
$\check{b}$	$a\check{b}$	$1'abb$	$\check{b}$

$ D_2  = 3$
$ D_3  = 5$
$ D_4  = 16$
$B_5$ is a basis
$B_6$ is a basis

$$(abb)31 \cong |\supseteq (a)2(abb)$$

$$(ab)7(a, bb)(bb, a)$$

The automorphism group of  $(abb)31$  is  $\{(), (bb)\}$ .  
 Not finitely representable.

$(abb)32$  9 Mandatory:  $b1'b\ bbb\ aba\ abb\ bab\ \text{---}\ bb\check{b}\ \text{---}$   
 2 Forbidden:  $\text{---}\ \text{---}\ \text{---}\ \text{---}\ \text{---}\ bba\ \text{---}\ aaa$

;	$a$	$b$	$\check{b}$
$a$	$1'b\check{b}$	$ab$	$a\check{b}$
$b$	$ab$	$b\check{b}$	$1'abb$
$\check{b}$	$a\check{b}$	$1'abb$	$b\check{b}$

$J$	$a_{01}$	$b_{02}$	$\check{b}_{21}$	$\check{b}_{03}$	$b_{31}$	$a_{24}$	$a_{43}$
$L$	$b_{01}$	$a_{02}$	$a_{21}$	$a_{03}$	$b_{31}$	$\check{b}_{04}$	$\check{b}_{41}$
$M$	$a_{01}$	$b_{02}$	$\check{b}_{21}$	$a_{03}$	$a_{32}$	$a_{24}$	$a_{41}$

$ D_2  = 3$
$ D_3  = 5$
$ D_4  = 15$
No 5DB

$$(ab\check{b})32 \cong |\supseteq (a)2(ab\check{b})$$

$$(ab)6(b\check{b}, a)$$

The automorphism group of  $(ab\check{b})32$  is  $\{(), (b\check{b})\}$ .

$(ab\check{b})33$     10 Mandatory:  $b1'b\ bbb\ aba\ abb\ bab$  —  $bb\check{b}\ aaa$   
 1 Forbidden: — — — — —  $bba$  — —

;	$a$	$b$	$\check{b}$
$a$	$1'ab\check{b}$	$ab$	$a\check{b}$
$b$	$ab$	$b\check{b}$	$1'ab\check{b}$
$\check{b}$	$a\check{b}$	$1'ab\check{b}$	$b\check{b}$

$ D_2  = 3$
$ D_3  = 6$
$ D_4  = 21$
$ 4 \times 4\text{'s in maximum proper 5DB}  = 20$

$$(ab\check{b})33 \cong |\supseteq (a)2(ab\check{b})$$

$$(ab)7(a, b\check{b})(b\check{b}, a)$$

The automorphism group of  $(ab\check{b})33$  is  $\{(), (b\check{b})\}$ .

Forbidden minors of the maximum 5-dimensional basis:

$$a_{01} \ a_{02} \ b_{03} \ b_{12} \ b_{13} \ a_{23}$$

$(ab\check{b})33$  is (isomorphic to?) S. Comer's algebra  $C_8^{0123}$ . I proved that  $(ab\check{b})33 \in$  RRA on 11-17-1992.

$(ab\check{b})34$     9 Mandatory:  $b1'b\ bbb\ aba\ abb\ bab\ bba$  — —  
 2 Forbidden: — — — — —  $bb\check{b}\ aaa$

;	$a$	$b$	$\check{b}$
$a$	$1'b\check{b}$	$ab\check{b}$	$ab\check{b}$
$b$	$ab\check{b}$	$ab$	$1'ab\check{b}$
$\check{b}$	$ab\check{b}$	$1'ab\check{b}$	$a\check{b}$

$ D_2  = 3$
$ D_3  = 5$
$ D_4  = 23$
$ 4 \times 4\text{'s in maximum proper 5DB}  = 22$

$$(ab\check{b})34 \cong |\supseteq (a)2(ab\check{b})$$

$$(ab)6(b\check{b}, a)$$

The automorphism group of  $(abb)34$  is  $\{(), (b\check{b})\}$ .

Forbidden minors of the maximum 5-dimensional basis:

$$a_{01} \quad b_{02} \quad b_{03} \quad \check{b}_{12} \quad \check{b}_{13} \quad a_{23}$$

$(abb)34 \notin \text{RRA}$  because R. L. Kramer proved that  $(abb)34 \notin \text{RA}_7$  on 11-6-92.

A program written in Pascal showed that  $(abb)34$  has no 6-dimensional basis on 11-19-92. Hence  $(abb)34 \in \text{RA}_5 \sim \text{RA}_6$ .

Note that  $(abb)34 \cong | \subseteq (a\check{a}b\check{b})77 \notin \text{RA}_6$ .

$(abb)35$     10 Mandatory:  $b1'b \ bbb \ aba \ abb \ bab \ bba \ \_ \ aaa$

1 Forbidden:  $\_ \ \_ \ \_ \ \_ \ \_ \ \_ \ \_ \ b\check{b}\check{b} \ \_$

;	$a$	$b$	$\check{b}$
$a$	$1'a\check{b}\check{b}$	$abb$	$ab\check{b}$
$b$	$ab\check{b}$	$ab$	$1'a\check{b}\check{b}$
$\check{b}$	$ab\check{b}$	$1'a\check{b}\check{b}$	$a\check{b}$

$ D_2  = 3$
$ D_3  = 6$
$ D_4  = 32$
$B_5$ is a basis
$B_6$ is a basis

$$(abb)35 \cong | \supseteq (a)2(ab\check{b})$$

$$(ab)7(a, b\check{b})(b\check{b}, a)$$

The automorphism group of  $(abb)35$  is  $\{(), (b\check{b})\}$ .

$a$  is flexible.

$(abb)36$     10 Mandatory:  $b1'b \ bbb \ aba \ abb \ bab \ bba \ b\check{b}\check{b} \ \_$

1 Forbidden:  $\_ \ \_ \ \_ \ \_ \ \_ \ \_ \ \_ \ \_ \ aaaa$

;	$a$	$b$	$\check{b}$
$a$	$1'b\check{b}\check{b}$	$ab\check{b}$	$ab\check{b}$
$b$	$ab\check{b}$	$ab\check{b}$	$1'a\check{b}\check{b}$
$\check{b}$	$ab\check{b}$	$1'a\check{b}\check{b}$	$ab\check{b}$

$ D_2  = 3$
$ D_3  = 6$
$ D_4  = 33$
$B_5$ is a basis
$B_6$ is a basis

$$(abb)36 \cong | \supseteq (a)2(ab\check{b})$$

$$(ab)6(b\check{b}, a)$$

The automorphism group of  $(abb)36$  is  $\{(), (b\check{b})\}$ .

$b$  is flexible.

$(abb)37$     11 Mandatory:  $b1'b \ bbb \ aba \ abb \ bab \ bba \ b\check{b}\check{b} \ aaa$

0 Forbidden:  $\_ \ \_ \ \_ \ \_ \ \_ \ \_ \ \_ \ \_ \ \_ \ \_ \ \_$

;	$a$	$b$	$\check{b}$
$a$	$1'abb$	$abb$	$abb$
$b$	$abb$	$abb$	$1'abb$
$\check{b}$	$abb$	$1'abb$	$abb$

$ D_2  = 3$
$ D_3  = 7$
$ D_4  = 42$
$B_5$ is a basis
$B_6$ is a basis

$$(abb)37 \cong |\supseteq (a)2(abb)$$

$$(ab)7(a, \check{b})(\check{b}, a)$$

The automorphism group of  $(abb)37$  is  $\{(), (\check{b}\check{b})\}$ .  
 $a$  and  $b$  are flexible. Finitely representable by a probabilistic proof.

$(abc)1$     5 Mandatory: — — — — —  $abc$  — — —  
 9 Forbidden:  $aab\ abb\ aac\ acc\ bbc\ bcc$  — —  $ccc\ bbb\ aaa$

;	$a$	$b$	$c$
$a$	$1'$	$c$	$b$
$b$	$c$	$1'$	$a$
$c$	$b$	$a$	$1'$

$ D_2  = 3$
$ D_3  = 1$
$ D_4  = 1$
$B_5$ is a basis
$B_6$ is a basis

$$(abc)1 \cong |\supseteq (a)2(abc)$$

$$\cong |\supseteq (ab)1(a, bc)(b, ac)(c, ab)$$

The automorphism group of  $(abc)1$  is  $\{(), (bc), (ab), (abc), (acb), (ac)\}$ .  
 $\subseteq \mathbf{Cm}(\mathbb{Z}_2^2)$  via  $a \rightarrow 01, b \rightarrow 10, c \rightarrow 11, 1' \rightarrow 00$ .

Check data and program on this one, because some output from 11-19-1992 (filename: newdata) says there are no diversity 5-by-5's.

Note that  $1' + a, 1' + b,$  and  $1' + c$  are equivalence elements of  $(abc)1$ . For example,  $(1' + a);(1' + a) = 1' + a + a; a = 1' + a$ . The algebra is commutative so the equivalence elements commute under  $;$ ; hence  $;$  is the join operation in the lattice of commuting equivalence elements whose universe is  $\{1', 1' + a, 1' + b, 1' + c, 1\}$ . This lattice is isomorphic to the modular but nondistributive lattice  $M_3$ . Check one of the joins:  $(1' + a);(1' + b) = 1' + a + b + a; b = 1' + a + b + c = 1$ . For meets, note that  $(1' + a) \cdot (1' + b) = 1'$ . The representation of this algebra gives an example of a (modular) lattice of commuting equivalence relations that is not distributive.

$$(abc)1 \quad \{2\} \quad \{3\} \quad \{4\} \quad \mathbb{Z}_2^2$$

$(abc)2$     7 Mandatory: — — — — —  $bcc\ abc$  —  $bbb$  —  
 7 Forbidden:  $aab\ abb\ aac\ acc\ bbc$  — —  $ccc$  —  $aaa$

;	<i>a</i>	<i>b</i>	<i>c</i>
<i>a</i>	1'	<i>c</i>	<i>b</i>
<i>b</i>	<i>c</i>	1' <i>b</i>	<i>ac</i>
<i>c</i>	<i>b</i>	<i>ac</i>	1' <i>b</i>

$ D_2  = 3$
$ D_3  = 3$
$ D_4  = 6$
$B_5$ is a basis
$B_6$ is a basis

$$(abc)2 \cong \supseteq (a)2(abc)$$

$$(ab)2(b, ac)$$

$$(ab)3(a, bc)$$

The automorphism group of  $(abc)2$  is  $\{()\}$ .

$(abc)2$	{4}	{3, 5}	{2, 6}	$Z_2 \times Z_3$
$(abc)2$	{2}	{3, 4, 7}	{5, 6, 8}	$D_8$
$(abc)2$	{2}	{3, 4, 7}	{5, 6, 8}	$Z_2 \times Z_4$
$(abc)2$	{2}	{3, 4, 7}	{5, 6, 8}	$Z_2^3$
$(abc)2$	{2}	{3, 5, 7, 9}	{4, 6, 8, 10}	$D_{10}$
$(abc)2$	{2}	{4, 5}	{3, 6}	$S_3$
$(abc)2$	{2}	{4, 5, 8}	{3, 6, 7}	$D_8$
$(abc)2$	{6}	{3, 5, 7, 9}	{2, 4, 8, 10}	$Z_2 \times Z_5$

$(abc)3$  9 Mandatory: — — — — *bbc bcc abc ccc bbb* —  
 5 Forbidden: *aab abb aac acc* — — — — — *aaa*

;	<i>a</i>	<i>b</i>	<i>c</i>
<i>a</i>	1'	<i>c</i>	<i>b</i>
<i>b</i>	<i>c</i>	1' <i>bc</i>	<i>abc</i>
<i>c</i>	<i>b</i>	<i>abc</i>	1' <i>bc</i>

$ D_2  = 3$
$ D_3  = 5$
$ D_4  = 16$
$B_5$ is a basis
$B_6$ is a basis

$$(abc)3 \cong \supseteq (a)2(abc)$$

$$(ab)3(a, bc)$$

The automorphism group of  $(abc)3$  is  $\{(), (bc)\}$ .

Finitely representable on  $\binom{6}{3} = 20$  via  $a \rightarrow$  disjoint,  $b \rightarrow$  meets at 1,  $c \rightarrow$  meets at 2.

$(abc)3$	{2}	{3, 6, 8, 9}	{4, 5, 7, 10}	$D_{10}$
$(abc)3$	{6}	{2, 3, 9, 10}	{4, 5, 7, 8}	$Z_2 \times Z_5$

$(abc)4$  10 Mandatory: — — — — *acc* — *bcc abc ccc bbb aaa*  
 4 Forbidden: *aab abb aac* — *bbc* — — — — —



;	<i>a</i>	<i>b</i>	<i>c</i>
<i>a</i>	1' <i>a</i>	<i>c</i>	<i>bc</i>
<i>b</i>	<i>c</i>	1' <i>b</i>	<i>ac</i>
<i>c</i>	<i>bc</i>	<i>ac</i>	1' <i>abc</i>

$ D_2  = 3$
$ D_3  = 6$
$ D_4  = 16$
$B_5$ is a basis
$B_6$ is a basis

$$(abc)4 \cong |\supseteq (a)2(abc)$$

$$(ab)4(a, bc)(b, ac)$$

$$(ab)7(ab, c)(c, ab)$$

The automorphism group of  $(abc)4$  is  $\{(), (ab)\}$ .  
 $\subseteq \mathbf{Cm}(\mathbb{Z}_2^4)$  via  $a \rightarrow 0100, 1000, 1100, b \rightarrow 0001, 0010, 0011$ .

$$(abc)4 \quad \{5, 9\} \quad \{7, 8\} \quad \{2, 3, 4, 6\} \quad Z_3 \times Z_3$$

$(abc)5$     10 Mandatory: — — — *acc bbc bcc abc ccc* — *aaa*  
 4 Forbidden: *aab abb aac* — — — — *bbb* —

;	<i>a</i>	<i>b</i>	<i>c</i>
<i>a</i>	1' <i>a</i>	<i>c</i>	<i>bc</i>
<i>b</i>	<i>c</i>	1' <i>c</i>	<i>abc</i>
<i>c</i>	<i>bc</i>	<i>abc</i>	1' <i>abc</i>

$ D_2  = 3$
$ D_3  = 6$
$ D_4  = 20$
$B_5$ is a basis
$B_6$ is a basis

$$(abc)5 \cong |\supseteq (a)2(abc)$$

$$(ab)4(a, bc)$$

The automorphism group of  $(abc)5$  is  $\{()\}$ .

$(abc)6$     11 Mandatory: — — — *acc bbc bcc abc ccc bbb aaa*  
 3 Forbidden: *aab abb aac* — — — — —

;	<i>a</i>	<i>b</i>	<i>c</i>
<i>a</i>	1' <i>a</i>	<i>c</i>	<i>bc</i>
<i>b</i>	<i>c</i>	1' <i>bc</i>	<i>abc</i>
<i>c</i>	<i>bc</i>	<i>abc</i>	1' <i>abc</i>

$ D_2  = 3$
$ D_3  = 7$
$ D_4  = 25$
$B_5$ is a basis
$B_6$ is a basis

$$(abc)6 \cong |\supseteq (a)2(abc)$$

$$(ab)4(a, bc)$$

$$(ab)7(ab,c)(c,ab)$$

The automorphism group of  $(abc)6$  is  $\{()\}$ .

---

$(abc)7$     8 Mandatory: — —  $aac$  —  $bbc$  —  $abc$   $ccc$  — —  
 6 Forbidden:  $aab$   $abb$  —  $acc$  —  $bcc$  — —  $bbb$   $aaa$

;	$a$	$b$	$c$
$a$	$1'c$	$c$	$ab$
$b$	$c$	$1'c$	$ab$
$c$	$ab$	$ab$	$1'c$

$ D_2  = 3$
$ D_3  = 4$
$ D_4  = 11$
$B_5$ is a basis
$B_6$ is a basis

$$(abc)7 \cong | \supseteq (a)2(abc)$$

$$(ab)2(c,ab)$$

The automorphism group of  $(abc)7$  is  $\{(), (ab)\}$ .

---

$(abc)8$     10 Mandatory: — —  $aac$   $acc$   $bbc$   $bcc$   $abc$   $ccc$  — —  
 4 Forbidden:  $aab$   $abb$  — — — — —  $bbb$   $aaa$

;	$a$	$b$	$c$
$a$	$1'c$	$c$	$abc$
$b$	$c$	$1'c$	$abc$
$c$	$abc$	$abc$	$1'abc$

$ D_2  = 3$
$ D_3  = 6$
$ D_4  = 25$
$B_5$ is a basis
$B_6$ is a basis

$$(abc)8 \cong | \supseteq (a)2(abc)$$

$$(ab)6(c,ab)$$

The automorphism group of  $(abc)8$  is  $\{(), (ab)\}$ .

$\in \text{RRA}$  since  $c$  is flexible.

---

$(abc)9$     11 Mandatory: — —  $aac$   $acc$   $bbc$   $bcc$   $abc$   $ccc$  —  $aaa$   
 3 Forbidden:  $aab$   $abb$  — — — — —  $bbb$  —

;	$a$	$b$	$c$
$a$	$1'ac$	$c$	$abc$
$b$	$c$	$1'c$	$abc$
$c$	$abc$	$abc$	$1'abc$

$ D_2  = 3$
$ D_3  = 7$
$ D_4  = 30$
$B_5$ is a basis
$B_6$ is a basis

$$(abc)9 \cong | \supseteq (a)2(abc)$$

The automorphism group of  $(abc)9$  is  $\{()\}$ .  
 $\in$  RRA since  $c$  is flexible.

$(abc)10$     12 Mandatory: — —  $aac\ acc\ bbc\ bcc\ abc\ ccc\ bbb\ aaa$   
 2 Forbidden:  $aab\ abb$  — — — — — — — —

;	$a$	$b$	$c$
$a$	$1'ac$	$c$	$abc$
$b$	$c$	$1'bc$	$abc$
$c$	$abc$	$abc$	$1'abc$

$ D_2  = 3$
$ D_3  = 8$
$ D_4  = 35$
$B_5$ is a basis
$B_6$ is a basis

$$(abc)10 \cong | \supseteq (a)2(abc)$$

$$(ab)7(ab, c)(c, ab)$$

The automorphism group of  $(abc)10$  is  $\{(), (ab)\}$ .  
 $\in$  RRA since  $c$  is flexible.

$(abc)11$     7 Mandatory: —  $abb$  —  $acc$  —  $bcc$  — — — —  
 7 Forbidden:  $aab$  —  $aac$  —  $bbc$  —  $abc\ ccc\ bbb\ aaa$

;	$a$	$b$	$c$
$a$	$1'$	$b$	$c$
$b$	$b$	$1'a$	$c$
$c$	$c$	$c$	$1'ab$

$ D_2  = 3$
$ D_3  = 3$
$ D_4  = 5$
$B_5$ is a basis
$B_6$ is a basis

$$(abc)11 \cong | \supseteq (a)2(abc)$$

$$(ab)2(ab, c)$$

$$(ab)3(a, bc)$$

The automorphism group of  $(abc)11$  is  $\{()\}$ .  
 $\subseteq \mathfrak{Cm}(\mathbb{Z}_2^3)$  via  $a \rightarrow 001, b \rightarrow 010, 110, c \rightarrow 100, 101, 110, 111$ .

$(abc)11$	$\{2\}$	$\{4, 6\}$	$\{3, 5, 7, 8\}$	$D_8$
$(abc)11$	$\{2\}$	$\{4, 6\}$	$\{3, 5, 7, 8\}$	$Z_2 \times Z_4$
$(abc)11$	$\{2\}$	$\{7, 8\}$	$\{3, 4, 5, 6\}$	$Z_2^3$
$(abc)11$	$\{3\}$	$\{2, 4\}$	$\{5, 6, 7, 8\}$	$Q_8$
$(abc)11$	$\{4\}$	$\{2, 6\}$	$\{3, 5, 7, 8\}$	$Z_2 \times Z_4$
$(abc)11$	$\{4\}$	$\{3, 7\}$	$\{2, 5, 6, 8\}$	$D_8$
$(abc)11$	$\{4\}$	$\{5, 8\}$	$\{2, 3, 6, 7\}$	$D_8$
$(abc)11$	$\{4\}$	$\{5, 8\}$	$\{2, 3, 6, 7\}$	$Z_2 \times Z_4$
$(abc)11$	$\{4\}$	$\{3, 7\}$	$\{2, 5, 6, 8\}$	$Z_8$

$(abc)12$  8 Mandatory:  $— abb — acc — bcc — — — aaa$   
 6 Forbidden:  $aab — aac — bbc — abc ccc bbb —$

;	$a$	$b$	$c$
$a$	$1'a$	$b$	$c$
$b$	$b$	$1'a$	$c$
$c$	$c$	$c$	$1'ab$

$ D_2  = 3$
$ D_3  = 4$
$ D_4  = 8$
$B_5$ is a basis
$B_6$ is a basis

$$(abc)12 \cong | \supseteq (a)2(abc)$$

$$(ab)2(ab, c)$$

$$(ab)4(a, bc)$$

The automorphism group of  $(abc)12$  is  $\{()\}$ .

$(abc)13$  8 Mandatory:  $— abb — acc — bcc — — bbb —$   
 6 Forbidden:  $aab — aac — bbc — abc ccc — aaa$

;	$a$	$b$	$c$
$a$	$1'$	$b$	$c$
$b$	$b$	$1'ab$	$c$
$c$	$c$	$c$	$1'ab$

$ D_2  = 3$
$ D_3  = 4$
$ D_4  = 8$
$B_5$ is a basis
$B_6$ is a basis

$$(abc)13 \cong | \supseteq (a)2(abc)$$

$$(ab)2(ab, c)$$

$$(ab)3(a, bc)$$

The automorphism group of  $(abc)13$  is  $\{()\}$ .

$(abc)14$  9 Mandatory:  $— abb — acc — bcc — — bbb aaa$   
 5 Forbidden:  $aab — aac — bbc — abc ccc — —$

;	$a$	$b$	$c$
$a$	$1'a$	$b$	$c$
$b$	$b$	$1'ab$	$c$
$c$	$c$	$c$	$1'ab$

$ D_2  = 3$
$ D_3  = 5$
$ D_4  = 11$
$B_5$ is a basis
$B_6$ is a basis

$$(abc)14 \cong | \supseteq (a)2(abc)$$

$$(ab)2(ab, c)$$

$$(ab)4(a, bc)$$

The automorphism group of  $(abc)14$  is  $\{()\}$ .

$(abc)15$  8 Mandatory:  $— abb — acc — bcc — ccc — —$   
6 Forbidden:  $aab — aac — bbc — abc — bbb aaa$

;	$a$	$b$	$c$
$a$	$1'$	$b$	$c$
$b$	$b$	$1'a$	$c$
$c$	$c$	$c$	$1'abc$

$ D_2  = 3$
$ D_3  = 4$
$ D_4  = 8$
$B_5$ is a basis
$B_6$ is a basis

$$(abc)15 \cong |\supseteq (a)2(abc)$$

$$(ab)3(a, bc)$$

$$(ab)4(ab, c)$$

The automorphism group of  $(abc)15$  is  $\{()\}$ .

$(abc)16$  9 Mandatory:  $— abb — acc — bcc — ccc — aaa$   
5 Forbidden:  $aab — aac — bbc — abc — bbb —$

;	$a$	$b$	$c$
$a$	$1'a$	$b$	$c$
$b$	$b$	$1'a$	$c$
$c$	$c$	$c$	$1'abc$

$ D_2  = 3$
$ D_3  = 5$
$ D_4  = 11$
$B_5$ is a basis
$B_6$ is a basis

$$(abc)16 \cong |\supseteq (a)2(abc)$$

$$(ab)4(ab, c)(a, bc)$$

The automorphism group of  $(abc)16$  is  $\{()\}$ .

$(abc)17$  9 Mandatory:  $— abb — acc — bcc — ccc bbb —$   
5 Forbidden:  $aab — aac — bbc — abc — — aaa$

;	$a$	$b$	$c$
$a$	$1'$	$b$	$c$
$b$	$b$	$1'ab$	$c$
$c$	$c$	$c$	$1'abc$

$ D_2  = 3$
$ D_3  = 5$
$ D_4  = 11$
$B_5$ is a basis
$B_6$ is a basis

$$(abc)17 \cong |\supseteq (a)2(abc)$$

$$(ab)3(a, bc)$$

$$(ab)4(ab, c)$$

The automorphism group of  $(abc)17$  is  $\{()\}$ .

$(abc)18$  10 Mandatory:  $— abb — acc — bcc — ccc bbb aaa$   
 4 Forbidden:  $aab — aac — bbc — abc — — —$

;	$a$	$b$	$c$
$a$	$1'a$	$b$	$c$
$b$	$b$	$1'ab$	$c$
$c$	$c$	$c$	$1'abc$

$ D_2  = 3$
$ D_3  = 6$
$ D_4  = 14$
$B_5$ is a basis
$B_6$ is a basis

$$(abc)18 \cong |\supseteq (a)2(abc)$$

$$(ab)4(ab, c)(a, bc)$$

The automorphism group of  $(abc)18$  is  $\{()\}$ .

$\subseteq \mathbf{Cm}(\mathbb{Z}_2^6)$  via  $a \rightarrow 000001, 000010, 000011, b \rightarrow 000100, 001000, 001100, c \rightarrow ?$ .

$(abc)19$  10 Mandatory:  $— abb — acc — bcc abc — bbb aaa$   
 4 Forbidden:  $aab — aac — bbc — — ccc — —$

;	$a$	$b$	$c$
$a$	$1'a$	$bc$	$bc$
$b$	$bc$	$1'ab$	$ac$
$c$	$bc$	$ac$	$1'ab$

$J$ : true.
$L$ : true.
$M$ : $b_{01} \ a_{02} \ b_{21} \ b_{03} \ c_{32} \ b_{24} \ b_{41}$

$ D_2  = 3$
$ D_3  = 6$
$ D_4  = 19$
No 5DB

$$(abc)19 \cong |\supseteq (a)2(abc)$$

$$(ab)4(a, bc)$$

$$(ab)6(ab, c)$$

The automorphism group of  $(abc)19$  is  $\{()\}$ .

$(abc)20$  11 Mandatory:  $— abb — acc — bcc abc ccc bbb aaa$   
 3 Forbidden:  $aab — aac — bbc — — — —$

;	<i>a</i>	<i>b</i>	<i>c</i>
<i>a</i>	1' <i>a</i>	<i>bc</i>	<i>bc</i>
<i>b</i>	<i>bc</i>	1' <i>ab</i>	<i>ac</i>
<i>c</i>	<i>bc</i>	<i>ac</i>	1' <i>abc</i>

<i>J</i> :	true.
<i>L</i> :	true.
<i>M</i> :	<i>b</i> <sub>01</sub> <i>a</i> <sub>02</sub> <i>b</i> <sub>21</sub> <i>b</i> <sub>03</sub> <i>c</i> <sub>32</sub> <i>b</i> <sub>24</sub> <i>b</i> <sub>41</sub>

$ D_2  = 3$
$ D_3  = 7$
$ D_4  = 23$
No 5DB

$$(abc)20 \cong | \supseteq (a)2(abc)$$

$$(ab)4(a, bc)$$

$$(ab)7(ab, c)(c, ab)$$

The automorphism group of  $(abc)20$  is  $\{()\}$ .

$(abc)21$     8 Mandatory: — *abb* — *acc* *bbc* *bcc* — — — —  
 6 Forbidden: *aab* — *aac* — — — — *abc* *ccc* *bbb* *aaa*

;	<i>a</i>	<i>b</i>	<i>c</i>
<i>a</i>	1'	<i>b</i>	<i>c</i>
<i>b</i>	<i>b</i>	1' <i>ac</i>	<i>bc</i>
<i>c</i>	<i>c</i>	<i>bc</i>	1' <i>ab</i>

$ D_2  = 3$
$ D_3  = 4$
$ D_4  = 9$
$ 4 \times 4\text{'s in maximum proper 5DB}  = 7$

$$(abc)21 \cong | \supseteq (a)2(abc)$$

$$(ab)3(a, bc)$$

The automorphism group of  $(abc)21$  is  $\{(), (bc)\}$ .

Forbidden minors of the maximum 5-dimensional basis:

$$b_{01} \ b_{02} \ c_{03} \ c_{12} \ b_{13} \ b_{23}$$

$$b_{01} \ c_{02} \ c_{03} \ c_{12} \ c_{13} \ b_{23}$$

Finitely RRA

$$(abc)21 \ \{2\} \ \{3, 4, 9, 10\} \ \{5, 6, 7, 8\} \ D_{10}$$

$$(abc)21 \ \{6\} \ \{2, 5, 7, 10\} \ \{3, 4, 8, 9\} \ Z_2 \times Z_5$$

$(abc)22$     9 Mandatory: — *abb* — *acc* *bbc* *bcc* — — — — *aaa*  
 5 Forbidden: *aab* — *aac* — — — — *abc* *ccc* *bbb* —

;	<i>a</i>	<i>b</i>	<i>c</i>
<i>a</i>	1' <i>a</i>	<i>b</i>	<i>c</i>
<i>b</i>	<i>b</i>	1' <i>ac</i>	<i>bc</i>
<i>c</i>	<i>c</i>	<i>bc</i>	1' <i>ab</i>

	$ D_2  = 3$
	$ D_3  = 5$
	$ D_4  = 12$
$ 4 \times 4\text{'s in maximum proper } 5\text{DB}  = 10$	

$$(abc)22 \cong |\supseteq (a)2(abc)$$

$$(ab)4(a, bc)$$

The automorphism group of  $(abc)22$  is  $\{(), (bc)\}$ .

Forbidden minors of the maximum 5-dimensional basis:

$$\begin{array}{cccccc} b_{01} & b_{02} & c_{03} & c_{12} & b_{13} & b_{23} \\ b_{01} & c_{02} & c_{03} & c_{12} & c_{13} & b_{23} \end{array}$$

Finitely RRA

$(abc)23$  9 Mandatory:  $— abb — acc\ bbc\ bcc — — bbb —$   
5 Forbidden:  $aab — aac — — — abc\ ccc — aaa$

;	$a$	$b$	$c$
$a$	$1^1$	$b$	$c$
$b$	$b$	$1^1 abc$	$bc$
$c$	$c$	$bc$	$1^1 ab$

$ D_2  = 3$
$ D_3  = 5$
$ D_4  = 14$
$B_5$ is a basis
$B_6$ is a basis

$$(abc)23 \cong |\supseteq (a)2(abc)$$

$$(ab)3(a, bc)$$

The automorphism group of  $(abc)23$  is  $\{()\}$ .

$(abc)24$  10 Mandatory:  $— abb — acc\ bbc\ bcc — — bbb\ aaa$   
4 Forbidden:  $aab — aac — — — abc\ ccc — —$

;	$a$	$b$	$c$
$a$	$1^1 a$	$b$	$c$
$b$	$b$	$1^1 abc$	$bc$
$c$	$c$	$bc$	$1^1 ab$

$ D_2  = 3$
$ D_3  = 6$
$ D_4  = 17$
$B_5$ is a basis
$B_6$ is a basis

$$(abc)24 \cong |\supseteq (a)2(abc)$$

$$(ab)4(a, bc)$$

The automorphism group of  $(abc)24$  is  $\{()\}$ .

$(abc)25$  10 Mandatory:  $— abb — acc\ bbc\ bcc — ccc\ bbb —$   
4 Forbidden:  $aab — aac — — — abc — — aaa$



;	<i>a</i>	<i>b</i>	<i>c</i>
<i>a</i>	1'	<i>b</i>	<i>c</i>
<i>b</i>	<i>b</i>	1' <i>abc</i>	<i>bc</i>
<i>c</i>	<i>c</i>	<i>bc</i>	1' <i>abc</i>

$ D_2  = 3$
$ D_3  = 6$
$ D_4  = 19$
$B_5$ is a basis
$B_6$ is a basis

$$(abc)25 \cong | \supseteq (a)2(abc) \\ (ab)3(a, bc)$$

The automorphism group of  $(abc)25$  is  $\{(), (bc)\}$ .

$(abc)26$     11 Mandatory: — *abb* — *acc bbc bcc* — *ccc bbb aaa*  
 3 Forbidden: *aab* — *aac* — — — *abc* — — —

;	<i>a</i>	<i>b</i>	<i>c</i>
<i>a</i>	1' <i>a</i>	<i>b</i>	<i>c</i>
<i>b</i>	<i>b</i>	1' <i>abc</i>	<i>bc</i>
<i>c</i>	<i>c</i>	<i>bc</i>	1' <i>abc</i>

$ D_2  = 3$
$ D_3  = 7$
$ D_4  = 22$
$B_5$ is a basis
$B_6$ is a basis

$$(abc)26 \cong | \supseteq (a)2(abc) \\ (ab)4(a, bc)$$

The automorphism group of  $(abc)26$  is  $\{(), (bc)\}$ .

$(abc)27$     10 Mandatory: — *abb* — *acc bbc bcc abc* — — *aaa*  
 4 Forbidden: *aab* — *aac* — — — *ccc bbb* —

;	<i>a</i>	<i>b</i>	<i>c</i>
<i>a</i>	1' <i>a</i>	<i>bc</i>	<i>bc</i>
<i>b</i>	<i>bc</i>	1' <i>ac</i>	<i>abc</i>
<i>c</i>	<i>bc</i>	<i>abc</i>	1' <i>ab</i>

$ D_2  = 3$
$ D_3  = 6$
$ D_4  = 22$
$ 4 \times 4\text{'s in maximum proper 5DB}  = 18$

$$(abc)27 \cong | \supseteq (a)2(abc) \\ (ab)4(a, bc) \\ (ab)6(ab, c)(ac, b)$$

The automorphism group of  $(abc)27$  is  $\{(), (bc)\}$ .

Forbidden minors of the maximum 5-dimensional basis:

$$\begin{array}{cccccc}
a_{01} & b_{02} & c_{03} & c_{12} & b_{13} & a_{23} \\
b_{01} & b_{02} & c_{03} & c_{12} & b_{13} & b_{23} \\
b_{01} & b_{02} & c_{03} & c_{12} & b_{13} & c_{23} \\
b_{01} & c_{02} & c_{03} & c_{12} & c_{13} & b_{23}
\end{array}$$

$\infty$ RRA (Comer)

(abc)28 11 Mandatory: — *abb* — *acc* *bbc* *bcc* *abc* — *bbb* *aaa*

3 Forbidden: *aab* — *aac* — — — — *ccc* — —

;	<i>a</i>	<i>b</i>	<i>c</i>
<i>a</i>	1' <i>a</i>	<i>bc</i>	<i>bc</i>
<i>b</i>	<i>bc</i>	1' <i>abc</i>	<i>abc</i>
<i>c</i>	<i>bc</i>	<i>abc</i>	1' <i>ab</i>

$ D_2  = 3$
$ D_3  = 7$
$ D_4  = 29$
$B_5$ is a basis
$B_6$ is a basis

$$(abc)28 \cong |\supseteq (a)2(abc)$$

$$(ab)4(a, bc)$$

$$(ab)6(ab, c)$$

$$(ab)7(ac, b)(b, ac)$$

The automorphism group of (abc)28 is  $\{()\}$ .

(abc)29 12 Mandatory: — *abb* — *acc* *bbc* *bcc* *abc* *ccc* *bbb* *aaa*

2 Forbidden: *aab* — *aac* — — — — — — —

;	<i>a</i>	<i>b</i>	<i>c</i>
<i>a</i>	1' <i>a</i>	<i>bc</i>	<i>bc</i>
<i>b</i>	<i>bc</i>	1' <i>abc</i>	<i>abc</i>
<i>c</i>	<i>bc</i>	<i>abc</i>	1' <i>abc</i>

$ D_2  = 3$
$ D_3  = 8$
$ D_4  = 36$
$B_5$ is a basis
$B_6$ is a basis

$$(abc)29 \cong |\supseteq (a)2(abc)$$

$$(ab)4(a, bc)$$

$$(ab)7(ab, c)(ac, b)(b, ac)(c, ab)$$

The automorphism group of (abc)29 is  $\{(), (bc)\}$ .

This algebra can be shown to be finitely representable by a probabilistic proof: three large sets with all inter-set edges colored *a*, all edges between the three sets colored at random using *b* and *c*.

(abc)30 8 Mandatory: — *abb* *aac* — — *bcc* *abc* — — —

6 Forbidden: *aab* — — *acc* *bbc* — — *ccc* *bbb* *aaa*

;	<i>a</i>	<i>b</i>	<i>c</i>
<i>a</i>	1' <i>c</i>	<i>bc</i>	<i>ab</i>
<i>b</i>	<i>bc</i>	1' <i>a</i>	<i>ac</i>
<i>c</i>	<i>ab</i>	<i>ac</i>	1' <i>b</i>

$B_6$  is a basis  
 $J$ : true.  
 $L$ : true.  
 $M$ : true.

$ D_2  = 3$
$ D_3  = 4$
$ D_4  = 8$
$ 4 \times 4\text{'s in maximum proper 5DB}  = 4$

$$(abc)30 \cong \supseteq (a)2(abc)$$

The automorphism group of  $(abc)30$  is  $\{(), (abc), (acb)\}$ .  
 Forbidden minors of the maximum 5-dimensional basis:

$a_{01}$	$a_{02}$	$c_{03}$	$c_{12}$	$a_{13}$	$a_{23}$
$a_{01}$	$b_{02}$	$b_{03}$	$b_{12}$	$b_{13}$	$a_{23}$
$a_{01}$	$b_{02}$	$c_{03}$	$c_{12}$	$b_{13}$	$a_{23}$
$b_{01}$	$c_{02}$	$c_{03}$	$c_{12}$	$c_{13}$	$b_{23}$

$$\subseteq \mathbf{Cm}(\mathbb{Z}_7).$$

$$(abc)30 \quad \{2, 7\} \quad \{4, 5\} \quad \{3, 6\} \quad \mathbb{Z}_7$$

$(abc)31$     9 Mandatory: — *abb aac* — — *bcc abc* — — *aaa*  
 5 Forbidden: *aab* — — *acc bbc* — — *ccc bbb* —

;	<i>a</i>	<i>b</i>	<i>c</i>
<i>a</i>	1' <i>ac</i>	<i>bc</i>	<i>ab</i>
<i>b</i>	<i>bc</i>	1' <i>a</i>	<i>ac</i>
<i>c</i>	<i>ab</i>	<i>ac</i>	1' <i>b</i>

$J$ :	$a_{01}$	$a_{02}$	$a_{21}$	$a_{03}$	$c_{31}$	$c_{24}$	$b_{43}$
$L$ :	$a_{01}$	$a_{02}$	$a_{21}$	$a_{03}$	$c_{31}$	$c_{04}$	$b_{41}$
$M$ :	$a_{01}$	$a_{02}$	$a_{21}$	$a_{03}$	$c_{32}$	$b_{24}$	$c_{41}$

$ D_2  = 3$
$ D_3  = 5$
$ D_4  = 12$
No 5DB

$$(abc)31 \cong \supseteq (a)2(abc)$$

The automorphism group of  $(abc)31$  is  $\{()\}$ .

$(abc)32$     10 Mandatory: — *abb aac* — — *bcc abc* — *bbb aaa*  
 4 Forbidden: *aab* — — *acc bbc* — — *ccc* — —

;	<i>a</i>	<i>b</i>	<i>c</i>
<i>a</i>	1' <i>ac</i>	<i>bc</i>	<i>ab</i>
<i>b</i>	<i>bc</i>	1' <i>ab</i>	<i>ac</i>
<i>c</i>	<i>ab</i>	<i>ac</i>	1' <i>b</i>

$J$	$a_{01}$	$a_{02}$	$a_{21}$	$a_{03}$	$c_{31}$	$c_{24}$	$b_{43}$
$L$	$a_{01}$	$a_{02}$	$a_{21}$	$a_{03}$	$c_{31}$	$c_{04}$	$b_{41}$
$M$	$a_{01}$	$a_{02}$	$a_{21}$	$a_{03}$	$c_{32}$	$b_{24}$	$c_{41}$

$ D_2  = 3$
$ D_3  = 6$
$ D_4  = 16$
No 5DB

$$(abc)32 \cong \supseteq (a)2(abc)$$

The automorphism group of  $(abc)32$  is  $\{()\}$ .

$(abc)33$  11 Mandatory: —  $abb\ aac$  — —  $bcc\ abc\ ccc\ bbb\ aaa$   
 3 Forbidden:  $aab$  — —  $acc\ bbc$  — — — — —

;	$a$	$b$	$c$
$a$	$1'ac$	$bc$	$ab$
$b$	$bc$	$1'ab$	$ac$
$c$	$ab$	$ac$	$1'bc$

$J$	$a_{01}$	$a_{02}$	$a_{21}$	$a_{03}$	$c_{31}$	$c_{24}$	$b_{43}$
$L$	$a_{01}$	$a_{02}$	$a_{21}$	$a_{03}$	$c_{31}$	$c_{04}$	$b_{41}$
$M$	$a_{01}$	$a_{02}$	$a_{21}$	$a_{03}$	$c_{32}$	$b_{24}$	$c_{41}$

$ D_2  = 3$
$ D_3  = 7$
$ D_4  = 20$
No 5DB

$$(abc)33 \cong \supseteq (a)2(abc)$$

The automorphism group of  $(abc)33$  is  $\{(), (abc), (acb)\}$ .

$(abc)34$  9 Mandatory: —  $abb\ aac$  —  $bbc\ bcc\ abc$  — — —  
 5 Forbidden:  $aab$  — —  $acc$  — — —  $ccc\ bbb\ aaa$

;	$a$	$b$	$c$
$a$	$1'c$	$bc$	$ab$
$b$	$bc$	$1'ac$	$abc$
$c$	$ab$	$abc$	$1'b$

$J$	$a_{01}$	$a_{02}$	$c_{21}$	$b_{03}$	$c_{31}$	$c_{24}$	$b_{43}$
$L$	$b_{01}$	$a_{02}$	$c_{21}$	$b_{03}$	$c_{31}$	$c_{04}$	$c_{41}$
$M$	$a_{01}$	$b_{02}$	$b_{21}$	$a_{03}$	$c_{32}$	$b_{24}$	$c_{41}$

$ D_2  = 3$
$ D_3  = 5$
$ D_4  = 15$
No 5DB

$$(abc)34 \cong \supseteq (a)2(abc)$$

$$(ab)6(ac, b)$$

The automorphism group of  $(abc)34$  is  $\{()\}$ .

No proper extensions.

(abc)35 10 Mandatory: — *abb aac* — *bbc bcc abc* — — *aaa*  
 4 Forbidden: *aab* — — *acc* — — — *ccc bbb* —

;	<i>a</i>	<i>b</i>	<i>c</i>
<i>a</i>	1' <i>ac</i>	<i>bc</i>	<i>ab</i>
<i>b</i>	<i>bc</i>	1' <i>ac</i>	<i>abc</i>
<i>c</i>	<i>ab</i>	<i>abc</i>	1' <i>b</i>

<i>J</i> :	<i>a</i> <sub>01</sub>	<i>a</i> <sub>02</sub>	<i>c</i> <sub>21</sub>	<i>b</i> <sub>03</sub>	<i>c</i> <sub>31</sub>	<i>c</i> <sub>24</sub>	<i>b</i> <sub>43</sub>
<i>L</i> :	<i>b</i> <sub>01</sub>	<i>a</i> <sub>02</sub>	<i>c</i> <sub>21</sub>	<i>b</i> <sub>03</sub>	<i>c</i> <sub>31</sub>	<i>c</i> <sub>04</sub>	<i>c</i> <sub>41</sub>
<i>M</i> :	<i>a</i> <sub>01</sub>	<i>a</i> <sub>02</sub>	<i>c</i> <sub>21</sub>	<i>a</i> <sub>03</sub>	<i>a</i> <sub>32</sub>	<i>a</i> <sub>24</sub>	<i>b</i> <sub>41</sub>

<i>D</i> <sub>2</sub>   = 3
<i>D</i> <sub>3</sub>   = 6
<i>D</i> <sub>4</sub>   = 19
No 5DB

$$(abc)35 \cong | \supseteq (a)2(abc)$$

$$(ab)6(ac, b)$$

The automorphism group of (abc)35 is {()}.

(abc)36 10 Mandatory: — *abb aac* — *bbc bcc abc* — *bbb* —  
 4 Forbidden: *aab* — — *acc* — — — *ccc* — *aaa*

;	<i>a</i>	<i>b</i>	<i>c</i>
<i>a</i>	1' <i>c</i>	<i>bc</i>	<i>ab</i>
<i>b</i>	<i>bc</i>	1' <i>abc</i>	<i>abc</i>
<i>c</i>	<i>ab</i>	<i>abc</i>	1' <i>b</i>

<i>D</i> <sub>2</sub>   = 3
<i>D</i> <sub>3</sub>   = 6
<i>D</i> <sub>4</sub>   = 22
No 5DB

$$(abc)36 \cong | \supseteq (a)2(abc)$$

$$(ab)7(ac, b)(b, ac)$$

The automorphism group of (abc)36 is {()}.

(abc)37 11 Mandatory: — *abb aac* — *bbc bcc abc* — *bbb aaa*  
 3 Forbidden: *aab* — — *acc* — — — *ccc* — —

;	<i>a</i>	<i>b</i>	<i>c</i>
<i>a</i>	1' <i>ac</i>	<i>bc</i>	<i>ab</i>
<i>b</i>	<i>bc</i>	1' <i>abc</i>	<i>abc</i>
<i>c</i>	<i>ab</i>	<i>abc</i>	1' <i>b</i>

<i>J</i> :	true.
<i>L</i> :	true.
<i>M</i> :	<i>a</i> <sub>01</sub> <i>a</i> <sub>02</sub> <i>c</i> <sub>21</sub> <i>a</i> <sub>03</sub> <i>a</i> <sub>32</sub> <i>a</i> <sub>24</sub> <i>b</i> <sub>41</sub>

<i>D</i> <sub>2</sub>   = 3
<i>D</i> <sub>3</sub>   = 7
<i>D</i> <sub>4</sub>   = 26
No 5DB

$$(abc)37 \cong | \supseteq (a)2(abc)$$

$$(ab)7(ac, b)(b, ac)$$

The automorphism group of  $(abc)37$  is  $\{()\}$ .

$(abc)38$  10 Mandatory: —  $abb\ aac$  —  $bbc\ bcc\ abc\ ccc$  — —  
 4 Forbidden:  $aab$  — —  $acc$  — — — —  $bbb\ aaa$

;	$a$	$b$	$c$
$a$	$1'c$	$bc$	$ab$
$b$	$bc$	$1'ac$	$abc$
$c$	$ab$	$abc$	$1'bc$

$ D_2  = 3$
$ D_3  = 6$
$ D_4  = 22$
No 5DB

$$(abc)38 \cong |\supseteq (a)2(abc)$$

$$(ab)6(ac, b)$$

The automorphism group of  $(abc)38$  is  $\{()\}$ .

$(abc)39$  11 Mandatory: —  $abb\ aac$  —  $bbc\ bcc\ abc\ ccc$  —  $aaa$   
 3 Forbidden:  $aab$  — —  $acc$  — — — —  $bbb$  —

;	$a$	$b$	$c$
$a$	$1'ac$	$bc$	$ab$
$b$	$bc$	$1'ac$	$abc$
$c$	$ab$	$abc$	$1'bc$

$J$ :	true.
$L$ :	true.
$M$ :	$a_{01}\ a_{02}\ c_{21}\ a_{03}\ a_{32}\ a_{24}\ b_{41}$

$ D_2  = 3$
$ D_3  = 7$
$ D_4  = 26$
No 5DB

$$(abc)39 \cong |\supseteq (a)2(abc)$$

$$(ab)6(ac, b)$$

The automorphism group of  $(abc)39$  is  $\{()\}$ .

$(abc)40$  11 Mandatory: —  $abb\ aac$  —  $bbc\ bcc\ abc\ ccc\ bbb$  —  
 3 Forbidden:  $aab$  — —  $acc$  — — — —  $aaa$

;	$a$	$b$	$c$
$a$	$1'c$	$bc$	$ab$
$b$	$bc$	$1'abc$	$abc$
$c$	$ab$	$abc$	$1'bc$

$ D_2  = 3$
$ D_3  = 7$
$ D_4  = 29$
$B_5$ is a basis
$B_6$ is a basis

$$(abc)40 \cong | \supseteq (a)2(abc) \\ (ab)7(ac, b)(b, ac)$$

The automorphism group of  $(abc)40$  is  $\{()\}$ .

Finitely representable on  $\binom{7}{3}$  via  $a \rightarrow$  disjoint,  $b \rightarrow$  meets at 1,  $c \rightarrow$  meets at 2.

$(abc)41$  12 Mandatory: —  $abb\ aac$  —  $bbc\ bcc\ abc\ ccc\ bbb\ aaa$   
 2 Forbidden:  $aab$  — —  $acc$  — — — — —

;	$a$	$b$	$c$
$a$	$1'ac$	$bc$	$ab$
$b$	$bc$	$1'abc$	$abc$
$c$	$ab$	$abc$	$1'bc$

$J$ :	true.
$L$ :	true.
$M$ :	$a_{01} \ a_{02} \ c_{21} \ a_{03} \ a_{32} \ a_{24} \ b_{41}$

$ D_2  = 3$
$ D_3  = 8$
$ D_4  = 33$
No 5DB

$$(abc)41 \cong | \supseteq (a)2(abc) \\ (ab)7(ac, b)(b, ac)$$

The automorphism group of  $(abc)41$  is  $\{()\}$ .

$(abc)42$  8 Mandatory: —  $abb\ aac\ acc\ bbc$  — — — — —  
 6 Forbidden:  $aab$  — — — — —  $bcc\ abc\ ccc\ bbb\ aaa$

;	$a$	$b$	$c$
$a$	$1'c$	$b$	$ac$
$b$	$b$	$1'ac$	$b$
$c$	$ac$	$b$	$1'a$

$ D_2  = 3$
$ D_3  = 4$
$ D_4  = 8$
$ 4 \times 4\text{'s in maximum proper 5DB}  = 6$

$$(abc)42 \cong | \supseteq (a)2(abc) \\ (ab)2(ac, b)$$

The automorphism group of  $(abc)42$  is  $\{(), (ac)\}$ .

Forbidden minors of the maximum 5-dimensional basis:

$$a_{01} \ a_{02} \ c_{03} \ c_{12} \ a_{13} \ a_{23} \\ a_{01} \ c_{02} \ c_{03} \ c_{12} \ c_{13} \ a_{23}$$

Finitely representable.

$$(abc)42 \ \{3, 9\} \ \{2, 4, 6, 8, 10\} \ \{5, 7\} \ D_{10} \\ (abc)42 \ \{3, 9\} \ \{2, 4, 6, 8, 10\} \ \{5, 7\} \ Z_2 \times Z_5$$

$(abc)43$  9 Mandatory: —  $abb\ aac\ acc\ bbc$  — — — — —  $aaa$   
 5 Forbidden:  $aab$  — — — — —  $bcc\ abc\ ccc\ bbb$  —

;	<i>a</i>	<i>b</i>	<i>c</i>
<i>a</i>	1' <i>ac</i>	<i>b</i>	<i>ac</i>
<i>b</i>	<i>b</i>	1' <i>ac</i>	<i>b</i>
<i>c</i>	<i>ac</i>	<i>b</i>	1' <i>a</i>

$ D_2  = 3$
$ D_3  = 5$
$ D_4  = 13$
$B_5$ is a basis
$B_6$ is a basis

$$(abc)43 \cong |\supseteq (a)2(abc)$$

$$(ab)2(ac, b)$$

The automorphism group of  $(abc)43$  is  $\{()\}$ .

$(abc)44$  9 Mandatory: — *abb aac acc bbc* — — — *bbb* —  
 5 Forbidden: *aab* — — — — *bcc abc ccc* — *aaa*

;	<i>a</i>	<i>b</i>	<i>c</i>
<i>a</i>	1' <i>c</i>	<i>b</i>	<i>ac</i>
<i>b</i>	<i>b</i>	1' <i>abc</i>	<i>b</i>
<i>c</i>	<i>ac</i>	<i>b</i>	1' <i>a</i>

$ D_2  = 3$
$ D_3  = 5$
$ D_4  = 11$
$ 4 \times 4\text{'s in maximum proper 5DB}  = 9$

$$(abc)44 \cong |\supseteq (a)2(abc)$$

$$(ab)4(ac, b)$$

The automorphism group of  $(abc)44$  is  $\{(), (ac)\}$ .

Forbidden minors of the maximum 5-dimensional basis:

$$a_{01} \ a_{02} \ c_{03} \ c_{12} \ a_{13} \ a_{23}$$

$$a_{01} \ c_{02} \ c_{03} \ c_{12} \ c_{13} \ a_{23}$$

Finitely representable.

$(abc)45$  10 Mandatory: — *abb aac acc bbc* — — — *bbb aaa*  
 4 Forbidden: *aab* — — — — *bcc abc ccc* — —

;	<i>a</i>	<i>b</i>	<i>c</i>
<i>a</i>	1' <i>ac</i>	<i>b</i>	<i>ac</i>
<i>b</i>	<i>b</i>	1' <i>abc</i>	<i>b</i>
<i>c</i>	<i>ac</i>	<i>b</i>	1' <i>a</i>

$ D_2  = 3$
$ D_3  = 6$
$ D_4  = 16$
$B_5$ is a basis
$B_6$ is a basis

$$(abc)45 \cong |\supseteq (a)2(abc)$$

$$(ab)4(ac, b)$$

The automorphism group of  $(abc)45$  is  $\{()\}$ .



---

**(abc)46** 10 Mandatory:  $— abb aac acc bbc — — ccc — aaa$   
 4 Forbidden:  $aab — — — bcc abc — bbb —$

;	$a$	$b$	$c$
$a$	$1'ac$	$b$	$ac$
$b$	$b$	$1'ac$	$b$
$c$	$ac$	$b$	$1'ac$

$ D_2  = 3$
$ D_3  = 6$
$ D_4  = 18$
$B_5$ is a basis
$B_6$ is a basis

$$(abc)46 \cong |\supseteq (a)2(abc)$$

$$(ab)2(ac, b)$$

The automorphism group of **(abc)46** is  $\{(), (ac)\}$ .

---

**(abc)47** 11 Mandatory:  $— abb aac acc bbc — — ccc bbb aaa$   
 3 Forbidden:  $aab — — — bcc abc — — —$

;	$a$	$b$	$c$
$a$	$1'ac$	$b$	$ac$
$b$	$b$	$1'abc$	$b$
$c$	$ac$	$b$	$1'ac$

$ D_2  = 3$
$ D_3  = 7$
$ D_4  = 21$
$B_5$ is a basis
$B_6$ is a basis

$$(abc)47 \cong |\supseteq (a)2(abc)$$

$$(ab)4(ac, b)$$

The automorphism group of **(abc)47** is  $\{(), (ac)\}$ .

---

**(abc)48** 11 Mandatory:  $— abb aac acc bbc — abc ccc — aaa$   
 3 Forbidden:  $aab — — — bcc — — bbb —$

;	$a$	$b$	$c$
$a$	$1'ac$	$bc$	$abc$
$b$	$bc$	$1'ac$	$ab$
$c$	$abc$	$ab$	$1'ac$

$J$ : true.
$L$ : true.
$M$ : $a_{01} a_{02} c_{21} b_{03} b_{32} a_{24} b_{41}$

$ D_2  = 3$
$ D_3  = 7$
$ D_4  = 29$
No 5DB

$$(abc)48 \cong |\supseteq (a)2(abc)$$

(ab)6(ac, b)

The automorphism group of (abc)48 is  $\{(), (ac)\}$ .

(abc)49    12 Mandatory: — abb aac acc bbc — abc ccc bbb aaa  
 2 Forbidden: aab — — — bcc — — —

;	a	b	c
a	1'ac	bc	abc
b	bc	1'abc	ab
c	abc	ab	1'ac

$ D_2  = 3$
$ D_3  = 8$
$ D_4  = 33$
No 5DB

(abc)49  $\cong$   $\supseteq$  (a)2(abc)

(ab)7(ac, b)(b, ac)

The automorphism group of (abc)49 is  $\{(), (ac)\}$ .

(abc)50    10 Mandatory: — abb aac acc bbc bcc abc — — —  
 4 Forbidden: aab — — — — — ccc bbb aaa

;	a	b	c
a	1'c	bc	abc
b	bc	1'ac	abc
c	abc	abc	1'ab

J :	c <sub>01</sub>	a <sub>02</sub>	a <sub>21</sub>	a <sub>03</sub>	b <sub>31</sub>	a <sub>24</sub>	c <sub>43</sub>
L :	c <sub>01</sub>	a <sub>02</sub>	a <sub>21</sub>	a <sub>03</sub>	b <sub>31</sub>	a <sub>04</sub>	c <sub>41</sub>
M :	true.						

$ D_2  = 3$
$ D_3  = 6$
$ D_4  = 24$
No 5DB

(abc)50  $\cong$   $\supseteq$  (a)2(abc)

(ab)6(ab, c)(ac, b)

The automorphism group of (abc)50 is  $\{(), (ab, c)(ac, b)\}$ .

(abc)51    11 Mandatory: — abb aac acc bbc bcc abc — — aaa  
 3 Forbidden: aab — — — — — ccc bbb —

;	a	b	c
a	1'ac	bc	abc
b	bc	1'ac	abc
c	abc	abc	1'ab

$ D_2  = 3$
$ D_3  = 7$
$ D_4  = 31$
$ 4 \times 4\text{'s in maximum proper 5DB}  = 27$

(abc)51  $\cong$   $\supseteq$  (a)2(abc)

$$(ab)6(ab, c)(ac, b)$$

The automorphism group of  $(abc)51$  is  $\{()\}$ .

Forbidden minors of the maximum 5-dimensional basis:

$$\begin{matrix} a_{01} & a_{02} & c_{03} & c_{12} & a_{13} & a_{23} \\ a_{01} & a_{02} & c_{03} & c_{12} & b_{13} & b_{23} \\ a_{01} & b_{02} & c_{03} & c_{12} & b_{13} & a_{23} \\ b_{01} & b_{02} & c_{03} & c_{12} & b_{13} & b_{23} \end{matrix}$$

$\infty$ RRA (Lukacs). Comer's  $A_7^{023}$ .

$(abc)52$  11 Mandatory: —  $abb$   $aac$   $acc$   $bbc$   $bcc$   $abc$  —  $bbb$  —  
 3 Forbidden:  $aab$  — — — — —  $ccc$  —  $aaa$

;	$a$	$b$	$c$
$a$	$1'c$	$bc$	$abc$
$b$	$bc$	$1'abc$	$abc$
$c$	$abc$	$abc$	$1'ab$

$J$ :	$c_{01}$	$a_{02}$	$a_{21}$	$a_{03}$	$b_{31}$	$a_{24}$	$c_{43}$
$L$ :	$c_{01}$	$a_{02}$	$a_{21}$	$a_{03}$	$b_{31}$	$a_{04}$	$c_{41}$
$M$ :	true.						

$ D_2  = 3$
$ D_3  = 7$
$ D_4  = 31$
No 5DB

$$\begin{aligned} (abc)52 &\cong \supseteq (a)2(abc) \\ &(ab)6(ab, c) \\ &(ab)7(ac, b)(b, ac) \end{aligned}$$

The automorphism group of  $(abc)52$  is  $\{()\}$ .

$(abc)53$  12 Mandatory: —  $abb$   $aac$   $acc$   $bbc$   $bcc$   $abc$  —  $bbb$   $aaa$   
 2 Forbidden:  $aab$  — — — — —  $ccc$  — —

;	$a$	$b$	$c$
$a$	$1'ac$	$bc$	$abc$
$b$	$bc$	$1'abc$	$abc$
$c$	$abc$	$abc$	$1'ab$

$ D_2  = 3$
$ D_3  = 8$
$ D_4  = 38$
$ 4 \times 4\text{'s in maximum proper 5DB}  = 35$

$$\begin{aligned} (abc)53 &\cong \supseteq (a)2(abc) \\ &(ab)6(ab, c) \\ &(ab)7(ac, b)(b, ac) \end{aligned}$$

The automorphism group of  $(abc)53$  is  $\{()\}$ .

Forbidden minors of the maximum 5-dimensional basis:

$$\begin{matrix} a_{01} & a_{02} & c_{03} & c_{12} & a_{13} & a_{23} \\ a_{01} & a_{02} & c_{03} & c_{12} & b_{13} & b_{23} \\ a_{01} & b_{02} & c_{03} & c_{12} & b_{13} & a_{23} \end{matrix}$$

Not RRA (Jipsen)  $\notin$  RA<sub>6</sub>, 11-6-92. Comer's  $A_9^{023}$ .

(abc)54    11 Mandatory: — abb aac acc bbc bcc abc ccc — —  
 3 Forbidden: aab — — — — — — — bbb aaa

;	a	b	c
a	1'c	bc	abc
b	bc	1'ac	abc
c	abc	abc	1'abc

$ D_2  = 3$
$ D_3  = 7$
$ D_4  = 34$
$B_5$ is a basis
$B_6$ is a basis

$$(abc)54 \cong |\supseteq (a)2(abc)$$

$$(ab)6(ac, b)$$

$$(ab)7(ab, c)(c, ab)$$

The automorphism group of (abc)54 is  $\{()\}$ .  
 $\in$  RRA since  $c$  is flexible.

(abc)55    12 Mandatory: — abb aac acc bbc bcc abc ccc — aaa  
 2 Forbidden: aab — — — — — — — bbb —

;	a	b	c
a	1'ac	bc	abc
b	bc	1'ac	abc
c	abc	abc	1'abc

$ D_2  = 3$
$ D_3  = 8$
$ D_4  = 41$
$B_5$ is a basis
$B_6$ is a basis

$$(abc)55 \cong |\supseteq (a)2(abc)$$

$$(ab)6(ac, b)$$

$$(ab)7(ab, c)(c, ab)$$

The automorphism group of (abc)55 is  $\{()\}$ .  
 $\in$  RRA since  $c$  is flexible. Finitely representable on  $\binom{8}{3}$  via  $a \rightarrow 1, b \rightarrow 0, c \rightarrow 1$ .

(abc)56    12 Mandatory: — abb aac acc bbc bcc abc ccc bbb —  
 2 Forbidden: aab — — — — — — — aaa

;	a	b	c
a	1'c	bc	abc
b	bc	1'abc	abc
c	abc	abc	1'abc

$ D_2  = 3$
$ D_3  = 8$
$ D_4  = 41$
$B_5$ is a basis
$B_6$ is a basis

$$(abc)56 \cong |\supseteq (a)2(abc)$$

$$(ab)7(ab, c)(ac, b)(b, ac)(c, ab)$$

The automorphism group of  $(abc)56$  is  $\{()\}$ .  
 $\in$  RRA since  $c$  is flexible.

$(abc)57$  13 Mandatory: —  $abb\ aac\ acc\ bbc\ bcc\ abc\ ccc\ bbb\ aaa$   
 1 Forbidden:  $aab$  — — — — —

;	$a$	$b$	$c$
$a$	$1'ac$	$bc$	$abc$
$b$	$bc$	$1'abc$	$abc$
$c$	$abc$	$abc$	$1'abc$

$ D_2  = 3$
$ D_3  = 9$
$ D_4  = 48$
$B_5$ is a basis
$B_6$ is a basis

$$(abc)57 \cong |\supseteq (a)2(abc)$$

$$(ab)7(ab, c)(ac, b)(b, ac)(c, ab)$$

The automorphism group of  $(abc)57$  is  $\{()\}$ .  
 $\in$  RRA since  $c$  is flexible. Finitely representable on  $\binom{9}{3}$  via  $a \rightarrow 2, b \rightarrow 0, c \rightarrow 1$ .

$(abc)58$  10 Mandatory:  $aab\ abb\ aac\ acc\ bbc\ bcc$  — — — —  
 4 Forbidden: — — — — —  $abc\ ccc\ bbb\ aaa$

;	$a$	$b$	$c$
$a$	$1'bc$	$ab$	$ac$
$b$	$ab$	$1'ac$	$bc$
$c$	$ac$	$bc$	$1'ab$

$J$ :	$a_{01}$	$a_{02}$	$b_{21}$	$c_{03}$	$c_{31}$	$b_{24}$	$b_{43}$
$L$ :	true.						
$M$ :	$a_{01}$	$a_{02}$	$b_{21}$	$c_{03}$	$c_{32}$	$b_{24}$	$c_{41}$

$ D_2  = 3$
$ D_3  = 6$
$ D_4  = 18$
No 5DB

$$(abc)58 \cong |\supseteq (a)2(abc)$$

$$(ab)6(ab, c)(ac, b)(bc, a)$$

The automorphism group of  $(abc)58$  is  
 $\{(), (bc), (ab), (abc), (acb), (ac)\}$ .

(abc)59 11 Mandatory: *aab abb aac acc bbc bcc* — — — *aaa*  
 3 Forbidden: — — — — — — — *abc ccc bbb* —

;	<i>a</i>	<i>b</i>	<i>c</i>
<i>a</i>	1' <i>abc</i>	<i>ab</i>	<i>ac</i>
<i>b</i>	<i>ab</i>	1' <i>ac</i>	<i>bc</i>
<i>c</i>	<i>ac</i>	<i>bc</i>	1' <i>ab</i>

<i>J</i> :	<i>a</i> <sub>01</sub>	<i>a</i> <sub>02</sub>	<i>b</i> <sub>21</sub>	<i>c</i> <sub>03</sub>	<i>c</i> <sub>31</sub>	<i>b</i> <sub>24</sub>	<i>b</i> <sub>43</sub>
<i>L</i> :	true.						
<i>M</i> :	<i>a</i> <sub>01</sub>	<i>a</i> <sub>02</sub>	<i>b</i> <sub>21</sub>	<i>c</i> <sub>03</sub>	<i>c</i> <sub>32</sub>	<i>b</i> <sub>24</sub>	<i>c</i> <sub>41</sub>

$ D_2  = 3$
$ D_3  = 7$
$ D_4  = 25$
No 5DB

$$(abc)59 \cong | \supseteq (a)2(abc)$$

$$(ab)6(ab, c)(ac, b)$$

$$(ab)7(a, bc)(bc, a)$$

The automorphism group of (abc)59 is  $\{(), (bc)\}$ .

(abc)60 12 Mandatory: *aab abb aac acc bbc bcc* — — *bbb aaa*  
 2 Forbidden: — — — — — — — *abc ccc* — —

;	<i>a</i>	<i>b</i>	<i>c</i>
<i>a</i>	1' <i>abc</i>	<i>ab</i>	<i>ac</i>
<i>b</i>	<i>ab</i>	1' <i>abc</i>	<i>bc</i>
<i>c</i>	<i>ac</i>	<i>bc</i>	1' <i>ab</i>

<i>J</i> :	<i>a</i> <sub>01</sub>	<i>a</i> <sub>02</sub>	<i>c</i> <sub>21</sub>	<i>b</i> <sub>03</sub>	<i>b</i> <sub>31</sub>	<i>c</i> <sub>24</sub>	<i>c</i> <sub>43</sub>
<i>L</i> :	true.						
<i>M</i> :	<i>a</i> <sub>01</sub>	<i>a</i> <sub>02</sub>	<i>b</i> <sub>21</sub>	<i>c</i> <sub>03</sub>	<i>c</i> <sub>32</sub>	<i>b</i> <sub>24</sub>	<i>c</i> <sub>41</sub>

$ D_2  = 3$
$ D_3  = 8$
$ D_4  = 32$
No 5DB

$$(abc)60 \cong | \supseteq (a)2(abc)$$

$$(ab)6(ab, c)$$

$$(ab)7(a, bc)(ac, b)(b, ac)(bc, a)$$

The automorphism group of (abc)60 is  $\{(), (ab)\}$ .

(abc)61 13 Mandatory: *aab abb aac acc bbc bcc* — *ccc bbb aaa*  
 1 Forbidden: — — — — — — — *abc* — — —

;	<i>a</i>	<i>b</i>	<i>c</i>
<i>a</i>	1' <i>abc</i>	<i>ab</i>	<i>ac</i>
<i>b</i>	<i>ab</i>	1' <i>abc</i>	<i>bc</i>
<i>c</i>	<i>ac</i>	<i>bc</i>	1' <i>abc</i>

$ D_2  = 3$
$ D_3  = 9$
$ D_4  = 39$
$B_5$ is a basis
$B_6$ is a basis

$$(abc)61 \cong | \supseteq (a)2(abc)$$

$$(ab)7(ab, c)(a, bc)(ac, b)(b, ac)(bc, a)(c, ab)$$

The automorphism group of  $(abc)61$  is  $\{(), (bc), (ab), (abc), (acb), (ac)\}$ .  
 $\infty$ RRA but not finitely representable.

$(abc)62$     11 Mandatory:  $aab\ abb\ aac\ acc\ bbc\ bcc\ abc$  — — —  
               3 Forbidden: — — — — — — — — —  $ccc\ bbb\ aaa$

;	$a$	$b$	$c$
$a$	$1'bc$	$abc$	$abc$
$b$	$abc$	$1'ac$	$abc$
$c$	$abc$	$abc$	$1'ab$

$ D_2  = 3$
$ D_3  = 7$
$ D_4  = 36$
$B_5$ is a basis
$B_6$ is a basis

$$(abc)62 \cong | \supseteq (a)2(abc)$$

$$(ab)6(ab, c)(ac, b)(bc, a)$$

The automorphism group of  $(abc)62$  is  $\{(), (bc), (ab), (abc), (acb), (ac)\}$ .  
 Finitely representable but not  $\infty$ RRA.

$$(abc)62 \quad \{2, 6, 9, 13\} \quad \{3, 4, 11, 12\} \quad \{5, 7, 8, 10\} \quad Z_{13}$$

$(abc)63$     12 Mandatory:  $aab\ abb\ aac\ acc\ bbc\ bcc\ abc$  — —  $aaa$   
               2 Forbidden: — — — — — — — — —  $ccc\ bbb$  —

;	$a$	$b$	$c$
$a$	$1'abc$	$abc$	$abc$
$b$	$abc$	$1'ac$	$abc$
$c$	$abc$	$abc$	$1'ab$

$ D_2  = 3$
$ D_3  = 8$
$ D_4  = 46$
$B_5$ is a basis
$B_6$ is a basis

$$(abc)63 \cong | \supseteq (a)2(abc)$$

$$(ab)6(ab, c)(ac, b)$$

$$(ab)7(a, bc)(bc, a)$$

The automorphism group of  $(abc)63$  is  $\{(), (bc)\}$ .  
 $\in$  RRA since  $a$  is flexible.

$(abc)64$  13 Mandatory:  $aab\ abb\ aac\ acc\ bbc\ bcc\ abc$  —  $bbb\ aaa$   
 1 Forbidden: — — — — — — — — —  $ccc$  — —

;	$a$	$b$	$c$
$a$	$1'abc$	$abc$	$abc$
$b$	$abc$	$1'abc$	$abc$
$c$	$abc$	$abc$	$1'ab$

$ D_2  = 3$
$ D_3  = 9$
$ D_4  = 56$
$B_5$ is a basis
$B_6$ is a basis

$$(abc)64 \cong |\supseteq (a)2(abc)$$

$$(ab)6(ab, c)$$

$$(ab)7(a, bc)(ac, b)(b, ac)(bc, a)$$

The automorphism group of  $(abc)64$  is  $\{(), (ab)\}$ .  
 $\in$  RRA since  $a$  and  $b$  are flexible.

$(abc)65$  14 Mandatory:  $aab\ abb\ aac\ acc\ bbc\ bcc\ abc\ ccc\ bbb\ aaa$   
 0 Forbidden: — — — — — — — — — —

;	$a$	$b$	$c$
$a$	$1'abc$	$abc$	$abc$
$b$	$abc$	$1'abc$	$abc$
$c$	$abc$	$abc$	$1'abc$

$ D_2  = 3$
$ D_3  = 10$
$ D_4  = 66$
$B_5$ is a basis
$B_6$ is a basis

$$(abc)65 \cong |\supseteq (a)2(abc)$$

$$(ab)7(ab, c)(a, bc)(ac, b)(b, ac)(bc, a)(c, ab)$$

The automorphism group of  $(abc)65$  is  $\{(), (bc), (ab), (abc), (acb), (ac)\}$ .  
 $\in$  RRA since  $a$ ,  $b$ , and  $c$  are flexible.

$(a\check{a}b\check{b})1$  7 Mandatory: — — — — —  $bba$  — —  $a\check{a}\check{b}$  — — —  
 10 Forbidden:  $aba\ baa\ abb\ bab\ aab$  —  $aaa\ bbb$  —  $b\check{b}\check{a}\ a\check{a}\ b\check{b}$

;	$a$	$\check{a}$	$b$	$\check{b}$
$a$	$\check{b}$	$1'$	$\check{a}$	$b$
$\check{a}$	$1'$	$b$	$\check{b}$	$a$
$b$	$\check{a}$	$\check{b}$	$a$	$1'$
$\check{b}$	$b$	$a$	$1'$	$\check{a}$

$ D_2  = 4$
$ D_3  = 2$
$ D_4  = 1$
$B_5$ is a basis
$B_6$ is a basis



$$(a\check{a}\check{b}\check{b})1 \cong |\supseteq (a)2(a\check{a}\check{b}\check{b})$$

$$(ab)5(a\check{a}, \check{b}\check{b})(\check{b}\check{b}, a\check{a})$$

The automorphism group of  $(a\check{a}\check{b}\check{b})1$  is  $\{(), (a\check{a})(\check{b}\check{b}), (a\check{b}\check{a}), (a\check{b}\check{a}\check{b})\}$ .

$$(a\check{a}\check{b}\check{b})1 \quad \{2\} \quad \{5\} \quad \{4\} \quad \{3\} \quad Z_5$$

$(a\check{a}\check{b}\check{b})2$     9 Mandatory: — —  $abb \ bab$  — — — — —  $aa\check{a} \ bb\check{b}$   
 8 Forbidden:  $aba \ baa$  — —  $a\check{a}b \ bba$   $aaa \ bbb$   $a\check{a}\check{b} \ bb\check{a}$  — —

;	$a$	$\check{a}$	$b$	$\check{b}$
$a$	$\check{a}$	$1'$	$b$	$\check{b}$
$\check{a}$	$1'$	$a$	$b$	$\check{b}$
$b$	$b$	$b$	$\check{b}$	$1'a\check{a}$
$\check{b}$	$\check{b}$	$\check{b}$	$1'a\check{a}$	$b$

$ D_2  = 4$
$ D_3  = 4$
$ D_4  = 4$
$B_5$ is a basis
$B_6$ is a basis

$$(a\check{a}\check{b}\check{b})2 \cong |\supseteq (a)2(a\check{a}\check{b}\check{b})$$

$$(ab)4(a\check{a}, \check{b}\check{b})$$

$$(abb)3(a\check{a}, b, \check{b})(a\check{a}, \check{b}, b)$$

$$(abb)6(\check{b}\check{b}, a, \check{a})(\check{b}\check{b}, \check{a}, a)$$

The automorphism group of  $(a\check{a}\check{b}\check{b})2$  is  $\{(), (a\check{a}), (\check{b}\check{b}), (a\check{a})(\check{b}\check{b})\}$ .

$(a\check{a}\check{b}\check{b})3$     9 Mandatory: — —  $abb \ bab$  — — —  $bbb$  — —  $aa\check{a}$  — —  
 8 Forbidden:  $aba \ baa$  — —  $a\check{a}b \ bba$   $aaa$  — —  $a\check{a}\check{b} \ bb\check{a}$  — —  $bb\check{b}$

;	$a$	$\check{a}$	$b$	$\check{b}$
$a$	$\check{a}$	$1'$	$b$	$\check{b}$
$\check{a}$	$1'$	$a$	$b$	$\check{b}$
$b$	$b$	$b$	$b$	$1'a\check{a}\check{b}\check{b}$
$\check{b}$	$\check{b}$	$\check{b}$	$1'a\check{a}\check{b}\check{b}$	$\check{b}$

$ D_2  = 4$
$ D_3  = 4$
$ D_4  = 7$
$B_5$ is a basis
$B_6$ is a basis

$$(a\check{a}\check{b}\check{b})2 \quad \{2\} \quad \{4\} \quad \{3, 5, 7\} \quad \{6, 8, 9\} \quad Z_3 \times Z_3$$

$$(a\check{a}\check{b}\check{b})2 \quad \{3\} \quad \{6\} \quad \{2, 5, 8\} \quad \{4, 7, 9\} \quad Z_9$$

$$(a\check{a}\check{b}\check{b})3 \cong |\supseteq (a)2(a\check{a}\check{b}\check{b})$$

$$(ab)4(a\check{a}, \check{b}\check{b})$$

$$(abb)6(bb, a, \check{a})(bb, \check{a}, a)$$

$$(abb)12(a\check{a}, b, \check{b})(a\check{a}, \check{b}, b)$$

The automorphism group of  $(a\check{a}bb)3$  is  $\{(), (a\check{a}), (bb), (a\check{a})(bb)\}$ .

$(a\check{a}bb)4$  10 Mandatory:  $— — abb bab — — — bbb — — a\check{a} b\check{b}$

7 Forbidden:  $aba baa — — a\check{a}b bba aaa — a\check{a}b b\check{b} — —$

;	$a$	$\check{a}$	$b$	$\check{b}$
$a$	$\check{a}$	$1'$	$b$	$\check{b}$
$\check{a}$	$1'$	$a$	$b$	$\check{b}$
$b$	$b$	$b$	$b\check{b}$	$1'a\check{a}b\check{b}$
$\check{b}$	$\check{b}$	$\check{b}$	$1'a\check{a}b\check{b}$	$b\check{b}$

$$\begin{array}{l} |D_2| = 4 \\ |D_3| = 5 \\ |D_4| = 11 \\ B_5 \text{ is a basis} \\ B_6 \text{ is a basis} \end{array}$$

$$(a\check{a}bb)4 \cong \supseteq (a)2(a\check{a}bb)$$

$$(ab)4(a\check{a}, b\check{b})$$

$$(abb)6(bb, a, \check{a})(bb, \check{a}, a)$$

$$(abb)14(a\check{a}, b, \check{b})(a\check{a}, \check{b}, b)$$

The automorphism group of  $(a\check{a}bb)4$  is  $\{(), (a\check{a}), (bb), (a\check{a})(bb)\}$ .

$(a\check{a}bb)5$  9 Mandatory:  $— — abb bab — — aaa — — — — b\check{b}$

8 Forbidden:  $aba baa — — a\check{a}b bba — bbb a\check{a}b b\check{b} a\check{a} — —$

;	$a$	$\check{a}$	$b$	$\check{b}$
$a$	$a$	$1'a\check{a}$	$b$	$\check{b}$
$\check{a}$	$1'a\check{a}$	$\check{a}$	$b$	$\check{b}$
$b$	$b$	$b$	$\check{b}$	$1'a\check{a}$
$\check{b}$	$\check{b}$	$\check{b}$	$1'a\check{a}$	$b$

$$\begin{array}{l} |D_2| = 4 \\ |D_3| = 4 \\ |D_4| = 5 \\ B_5 \text{ is a basis} \\ B_6 \text{ is a basis} \end{array}$$

$$(a\check{a}bb)5 \cong \supseteq (a)2(a\check{a}bb)$$

$$(ab)4(a\check{a}, b\check{b})$$

$$(abb)3(a\check{a}, b, \check{b})(a\check{a}, \check{b}, b)$$

$$(abb)18(bb, a, \check{a})(bb, \check{a}, a)$$

The automorphism group of  $(a\check{a}bb)5$  is  $\{(), (a\check{a}), (bb), (a\check{a})(bb)\}$ .

$(a\check{a}bb)6$  10 Mandatory:  $— — abb bab — — aaa — — — — a\check{a} b\check{b}$

7 Forbidden:  $aba baa — — a\check{a}b bba — bbb a\check{a}b b\check{b} — —$

;	$a$	$\check{a}$	$b$	$\check{b}$
$a$	$a\check{a}$	$1'a\check{a}$	$b$	$\check{b}$
$\check{a}$	$1'a\check{a}$	$a\check{a}$	$b$	$\check{b}$
$b$	$b$	$b$	$\check{b}$	$1'a\check{a}$
$\check{b}$	$\check{b}$	$\check{b}$	$1'a\check{a}$	$b$

$ D_2  = 4$
$ D_3  = 5$
$ D_4  = 10$
$B_5$ is a basis
$B_6$ is a basis

$$\begin{aligned}
 (a\check{a}b\check{b})6 \cong | \supseteq & (a)2(a\check{a}b\check{b}) \\
 & (a\check{a})3(ab, \check{a}\check{b})(a\check{b}, \check{a}b)(\check{a}b, a\check{b})(\check{a}\check{b}, ab) \\
 & (ab)4(a\check{a}, b\check{b}) \\
 & (ab\check{b})3(a\check{a}, b, \check{b})(a\check{a}, \check{b}, b) \\
 & (ab\check{b})20(b\check{b}, a, \check{a})(b\check{b}, \check{a}, a)
 \end{aligned}$$

The automorphism group of  $(a\check{a}b\check{b})6$  is  $\{(), (a\check{a}), (b\check{b}), (a\check{a})(b\check{b})\}$ .

$(a\check{a}b\check{b})7$  9 Mandatory: — —  $abb\ bab$  — —  $aaa$  — —  $bb\check{a}$  — —  
 8 Forbidden:  $aba\ baa$  — —  $aab\ bba$  — —  $bbb\ aab$  — —  $aa\check{a}\ b\check{b}$

;	$a$	$\check{a}$	$b$	$\check{b}$
$a$	$a$	$1'a\check{a}$	$b\check{b}$	$\check{b}$
$\check{a}$	$1'a\check{a}$	$\check{a}$	$b$	$b\check{b}$
$b$	$b\check{b}$	$b$	$\check{a}$	$1'a\check{a}$
$\check{b}$	$\check{b}$	$b\check{b}$	$1'a\check{a}$	$a$

$ D_2  = 4$
$ D_3  = 4$
$ D_4  = 8$
$B_5$ is a basis
$B_6$ is a basis

$$\begin{aligned}
 (a\check{a}b\check{b})7 \cong | \supseteq & (a)2(a\check{a}b\check{b}) \\
 & (a\check{a})2(a\check{b}, \check{a}b)(\check{a}b, a\check{b}) \\
 & (a\check{a})3(ab, \check{a}\check{b})(\check{a}\check{b}, ab) \\
 & (ab)2(a\check{a}, b\check{b}) \\
 & (ab\check{b})17(b\check{b}, a, \check{a})(b\check{b}, \check{a}, a)
 \end{aligned}$$

The automorphism group of  $(a\check{a}b\check{b})7$  is  $\{(), (a\check{a})(b\check{b})\}$ .

$(a\check{a}b\check{b})8$  9 Mandatory: — —  $abb\ bab$  — —  $aaa\ bbb$  — — — —  
 8 Forbidden:  $aba\ baa$  — —  $aab\ bba$  — —  $aab\ b\check{b}\check{a}\ aa\check{a}\ b\check{b}$

;	$a$	$\check{a}$	$b$	$\check{b}$
$a$	$a$	$1'a\check{a}$	$b$	$\check{b}$
$\check{a}$	$1'a\check{a}$	$\check{a}$	$b$	$\check{b}$
$b$	$b$	$b$	$b$	$1'a\check{a}\check{b}\check{b}$
$\check{b}$	$\check{b}$	$\check{b}$	$1'a\check{a}\check{b}\check{b}$	$\check{b}$

$ D_2  = 4$
$ D_3  = 4$
$ D_4  = 8$
$B_5$ is a basis
$B_6$ is a basis

$$\begin{aligned}
(a\check{a}\check{b}\check{b})8 &\cong \supseteq (a)2(a\check{a}\check{b}\check{b}) \\
&(a\check{a})2(ab, \check{a}\check{b})(a\check{b}, \check{a}b)(\check{a}b, a\check{b})(\check{a}\check{b}, ab) \\
&(ab)4(a\check{a}, \check{b}\check{b}) \\
&(a\check{b}\check{b})12(a\check{a}, b, \check{b})(a\check{a}, \check{b}, b) \\
&(a\check{b}\check{b})18(\check{b}\check{b}, a, \check{a})(\check{b}\check{b}, \check{a}, a)
\end{aligned}$$

The automorphism group of  $(a\check{a}\check{b}\check{b})8$  is  $\{(), (a\check{a}), (\check{b}\check{b}), (a\check{a})(\check{b}\check{b})\}$ .

$(a\check{a}\check{b}\check{b})9$  10 Mandatory: — —  $abb\ bab$  — —  $aaa\ bbb$  — — —  $bb\check{b}$   
7 Forbidden:  $aba\ baa$  — —  $aab\ bba$  — —  $a\check{a}\check{b}\ \check{b}\check{b}\check{a}\ a\check{a}$  —

;	$a$	$\check{a}$	$b$	$\check{b}$
$a$	$a$	$1'a\check{a}$	$b$	$\check{b}$
$\check{a}$	$1'a\check{a}$	$\check{a}$	$b$	$\check{b}$
$b$	$b$	$b$	$\check{b}\check{b}$	$1'a\check{a}\check{b}\check{b}$
$\check{b}$	$\check{b}$	$\check{b}$	$1'a\check{a}\check{b}\check{b}$	$\check{b}\check{b}$

$ D_2  = 4$
$ D_3  = 5$
$ D_4  = 12$
$B_5$ is a basis
$B_6$ is a basis

$$\begin{aligned}
(a\check{a}\check{b}\check{b})9 &\cong \supseteq (a)2(a\check{a}\check{b}\check{b}) \\
&(ab)4(a\check{a}, \check{b}\check{b}) \\
&(a\check{b}\check{b})14(a\check{a}, b, \check{b})(a\check{a}, \check{b}, b) \\
&(a\check{b}\check{b})18(\check{b}\check{b}, a, \check{a})(\check{b}\check{b}, \check{a}, a)
\end{aligned}$$

The automorphism group of  $(a\check{a}\check{b}\check{b})9$  is  $\{(), (a\check{a}), (\check{b}\check{b}), (a\check{a})(\check{b}\check{b})\}$ .

$(a\check{a}\check{b}\check{b})10$  10 Mandatory: — —  $abb\ bab$  — —  $aaa\ bbb$  — —  $aa\check{a}$  —  
7 Forbidden:  $aba\ baa$  — —  $aab\ bba$  — —  $a\check{a}\check{b}\ \check{b}\check{b}\check{a}$  —  $bb\check{b}$

;	$a$	$\check{a}$	$b$	$\check{b}$
$a$	$a\check{a}$	$1'a\check{a}$	$b$	$\check{b}$
$\check{a}$	$1'a\check{a}$	$a\check{a}$	$b$	$\check{b}$
$b$	$b$	$b$	$b$	$1'a\check{a}\check{b}\check{b}$
$\check{b}$	$\check{b}$	$\check{b}$	$1'a\check{a}\check{b}\check{b}$	$\check{b}$

$ D_2  = 4$
$ D_3  = 5$
$ D_4  = 13$
$B_5$ is a basis
$B_6$ is a basis

$$\begin{aligned}
 (a\check{a}\check{b}\check{b})10 \cong | \supseteq & (a)2(a\check{a}\check{b}\check{b}) \\
 & (ab)4(a\check{a}, \check{b}\check{b}) \\
 & (a\check{b}\check{b})12(a\check{a}, b, \check{b})(a\check{a}, \check{b}, b) \\
 & (a\check{b}\check{b})20(\check{b}\check{b}, a, \check{a})(\check{b}\check{b}, \check{a}, a)
 \end{aligned}$$

The automorphism group of  $(a\check{a}\check{b}\check{b})10$  is  $\{(), (a\check{a}), (b\check{b}), (a\check{a})(b\check{b})\}$ .

$(a\check{a}\check{b}\check{b})11$  11 Mandatory:  $— — abb bab — — aaa bbb — — aa\check{a} \check{b}\check{b}$   
 6 Forbidden:  $aba baa — — aab\check{b} bba — — aab\check{b} \check{b}\check{a} — —$

;	$a$	$\check{a}$	$b$	$\check{b}$
$a$	$a\check{a}$	$1'a\check{a}$	$b$	$\check{b}$
$\check{a}$	$1'a\check{a}$	$a\check{a}$	$b$	$\check{b}$
$b$	$b$	$b$	$\check{b}\check{b}$	$1'a\check{a}\check{b}\check{b}$
$\check{b}$	$\check{b}$	$\check{b}$	$1'a\check{a}\check{b}\check{b}$	$\check{b}\check{b}$

$ D_2  = 4$
$ D_3  = 6$
$ D_4  = 17$
$B_5$ is a basis
$B_6$ is a basis

$$\begin{aligned}
 (a\check{a}\check{b}\check{b})11 \cong | \supseteq & (a)2(a\check{a}\check{b}\check{b}) \\
 & (a\check{a})3(ab, \check{a}\check{b})(a\check{b}, \check{a}\check{b})(\check{a}\check{b}, a\check{b})(\check{a}\check{b}, ab) \\
 & (ab)4(a\check{a}, \check{b}\check{b}) \\
 & (a\check{b}\check{b})14(a\check{a}, b, \check{b})(a\check{a}, \check{b}, b) \\
 & (a\check{b}\check{b})20(\check{b}\check{b}, a, \check{a})(\check{b}\check{b}, \check{a}, a)
 \end{aligned}$$

The automorphism group of  $(a\check{a}\check{b}\check{b})11$  is  $\{(), (a\check{a}), (b\check{b}), (a\check{a})(b\check{b})\}$ .

$(a\check{a}\check{b}\check{b})12$  10 Mandatory:  $— — abb bab — — aaa bbb — bb\check{a} — —$   
 7 Forbidden:  $aba baa — — aab\check{b} bba — — aab\check{b} — aa\check{a} \check{b}\check{b}$

;	$a$	$\check{a}$	$b$	$\check{b}$
$a$	$a$	$1'a\check{a}$	$b\check{b}$	$\check{b}$
$\check{a}$	$1'a\check{a}$	$\check{a}$	$b$	$b\check{b}$
$b$	$b\check{b}$	$b$	$\check{a}b$	$1'a\check{a}b\check{b}$
$\check{b}$	$\check{b}$	$b\check{b}$	$1'a\check{a}b\check{b}$	$a\check{b}$

$ D_2  = 4$
$ D_3  = 5$
$ D_4  = 15$
$B_5$ is a basis
$B_6$ is a basis

$$\begin{aligned}
(a\check{a}b\check{b})12 \cong |\supseteq (a)2(a\check{a}b\check{b}) \\
(a\check{a})2(a\check{b}, \check{a}b)(\check{a}b, a\check{b}) \\
(a\check{a})3(ab, \check{a}b)(\check{a}b, ab) \\
(ab)4(a\check{a}, b\check{b}) \\
(ab\check{b})18(b\check{b}, a, \check{a})(b\check{b}, \check{a}, a)
\end{aligned}$$

The automorphism group of  $(a\check{a}b\check{b})12$  is  $\{(), (a\check{a})(b\check{b})\}$ .

$(a\check{a}b\check{b})13$  11 Mandatory: — —  $abb\ bab$  — —  $aaa\ bbb$  —  $bb\check{a}$  —  $b\check{b}\check{b}$   
6 Forbidden:  $aba\ baa$  — —  $aab\ bba$  — —  $aab\check{b}$  —  $aa\check{a}$  —

;	$a$	$\check{a}$	$b$	$\check{b}$
$a$	$a$	$1'a\check{a}$	$b\check{b}$	$\check{b}$
$\check{a}$	$1'a\check{a}$	$\check{a}$	$b$	$b\check{b}$
$b$	$b\check{b}$	$b$	$\check{a}b\check{b}$	$1'a\check{a}b\check{b}$
$\check{b}$	$\check{b}$	$b\check{b}$	$1'a\check{a}b\check{b}$	$ab\check{b}$

$ D_2  = 4$
$ D_3  = 6$
$ D_4  = 21$
$B_5$ is a basis
$B_6$ is a basis

$$\begin{aligned}
(a\check{a}b\check{b})13 \cong |\supseteq (a)2(a\check{a}b\check{b}) \\
(a\check{a})3(ab, \check{a}b)(\check{a}b, ab) \\
(ab)4(a\check{a}, b\check{b}) \\
(ab\check{b})18(b\check{b}, a, \check{a})(b\check{b}, \check{a}, a)
\end{aligned}$$

The automorphism group of  $(a\check{a}b\check{b})13$  is  $\{(), (a\check{a})(b\check{b})\}$ .

$(a\check{a}b\check{b})14$  10 Mandatory: — —  $abb\ bab$  —  $bba\ aaa$  — —  $bb\check{a}$  — —  
7 Forbidden:  $aba\ baa$  — —  $aab$  — —  $bbb\ aab\check{b}$  —  $aa\check{a}\ b\check{b}\check{b}$

;	$a$	$\check{a}$	$b$	$\check{b}$
$a$	$a$	$1'a\check{a}$	$b\check{b}$	$b\check{b}$
$\check{a}$	$1'a\check{a}$	$\check{a}$	$b\check{b}$	$b\check{b}$
$b$	$b\check{b}$	$b\check{b}$	$a\check{a}$	$1'a\check{a}$
$\check{b}$	$b\check{b}$	$b\check{b}$	$1'a\check{a}$	$a\check{a}$

$ D_2  = 4$
$ D_3  = 5$
$ D_4  = 17$
$B_5$ is a basis
$B_6$ is a basis

$$\begin{aligned}
 (a\check{a}b\check{b})14 \cong |\supseteq (a)2(a\check{a}b\check{b}) \\
 (a\check{a})3(ab, \check{a}\check{b})(a\check{b}, \check{a}b)(\check{a}b, a\check{b})(\check{a}\check{b}, ab) \\
 (ab)2(a\check{a}, b\check{b}) \\
 (ab\check{b})4(a\check{a}, b, \check{b})(a\check{a}, \check{b}, b) \\
 (ab\check{b})17(b\check{b}, a, \check{a})(b\check{b}, \check{a}, a)
 \end{aligned}$$

The automorphism group of  $(a\check{a}b\check{b})14$  is  $\{(), (a\check{a}), (b\check{b}), (a\check{a})(b\check{b})\}$ .

$(a\check{a}b\check{b})15$  11 Mandatory: — —  $abb\ bab$  — —  $bba\ aaa$  — —  $bb\check{a}\ a\check{a}\check{a}$  —  
 6 Forbidden:  $aba\ baa$  — —  $aab$  — —  $bbb\ aab$  — —  $bb\check{b}$

;	$a$	$\check{a}$	$b$	$\check{b}$
$a$	$a\check{a}$	$1'a\check{a}$	$b\check{b}$	$b\check{b}$
$\check{a}$	$1'a\check{a}$	$a\check{a}$	$b\check{b}$	$b\check{b}$
$b$	$b\check{b}$	$b\check{b}$	$a\check{a}$	$1'a\check{a}$
$\check{b}$	$b\check{b}$	$b\check{b}$	$1'a\check{a}$	$a\check{a}$

$ D_2  = 4$
$ D_3  = 6$
$ D_4  = 24$
$B_5$ is a basis
$B_6$ is a basis

$$\begin{aligned}
 (a\check{a}b\check{b})15 \cong |\supseteq (a)2(a\check{a}b\check{b}) \\
 (a\check{a})3(ab, \check{a}\check{b})(a\check{b}, \check{a}b)(\check{a}b, a\check{b})(\check{a}\check{b}, ab) \\
 (ab)2(a\check{a}, b\check{b}) \\
 (ab\check{b})4(a\check{a}, b, \check{b})(a\check{a}, \check{b}, b) \\
 (ab\check{b})19(b\check{b}, a, \check{a})(b\check{b}, \check{a}, a)
 \end{aligned}$$

The automorphism group of  $(a\check{a}b\check{b})15$  is  $\{(), (a\check{a}), (b\check{b}), (a\check{a})(b\check{b})\}$ .

$(a\check{a}b\check{b})16$  11 Mandatory: — —  $abb\ bab$  — —  $bba\ aaa$  — —  $aab$  — —  $bb\check{b}$   
 6 Forbidden:  $aba\ baa$  — —  $aab$  — —  $bbb$  — —  $bb\check{a}\ a\check{a}\check{a}$  —

;	$a$	$\check{a}$	$b$	$\check{b}$
$a$	$a\check{b}$	$1'a\check{a}$	$\check{a}b$	$b\check{b}$
$\check{a}$	$1'a\check{a}$	$\check{a}b$	$b\check{b}$	$a\check{b}$
$b$	$\check{a}b$	$b\check{b}$	$a\check{b}$	$1'a\check{a}$
$\check{b}$	$b\check{b}$	$a\check{b}$	$1'a\check{a}$	$\check{a}b$

$ D_2  = 4$
$ D_3  = 6$
$ D_4  = 16$
$B_5$ is a basis
$B_6$ is a basis

$$(a\check{a}b\check{b})16 \cong |\supseteq (a)2(a\check{a}b\check{b})$$

$$(a\check{a})3(ab, \check{a}\check{b})(a\check{b}, \check{a}b)(\check{a}b, a\check{b})(\check{a}\check{b}, ab)$$

$$(ab)7(a\check{a}, b\check{b})(b\check{b}, a\check{a})$$

The automorphism group of  $(a\check{a}b\check{b})16$  is  $\{(), (a\check{a})(b\check{b})\}$ .

$(a\check{a}b\check{b})17$  11 Mandatory: — —  $abb\ bab$  —  $bba\ aaa\ bbb$  —  $bb\check{a}$  — —  
6 Forbidden:  $aba\ baa$  — —  $aab$  — — —  $a\check{a}\check{b}$  —  $aa\check{a}\ b\check{b}$

;	$a$	$\check{a}$	$b$	$\check{b}$
$a$	$a$	$1'a\check{a}$	$b\check{b}$	$b\check{b}$
$\check{a}$	$1'a\check{a}$	$\check{a}$	$b\check{b}$	$b\check{b}$
$b$	$b\check{b}$	$b\check{b}$	$a\check{a}b$	$1'a\check{a}b\check{b}$
$\check{b}$	$b\check{b}$	$b\check{b}$	$1'a\check{a}b\check{b}$	$a\check{a}\check{b}$

$J$ :	true.
$L$ :	true.
$M$ :	$b_{01} \ a_{02} \ \check{b}_{21} \ \check{b}_{03} \ \check{b}_{32} \ \check{b}_{24} \ \check{b}_{41}$

$ D_2  = 4$
$ D_3  = 6$
$ D_4  = 27$
No 5DB

$$(a\check{a}b\check{b})17 \cong |\supseteq (a)2(a\check{a}b\check{b})$$

$$(a\check{a})3(ab, \check{a}\check{b})(a\check{b}, \check{a}b)(\check{a}b, a\check{b})(\check{a}\check{b}, ab)$$

$$(ab)4(a\check{a}, b\check{b})$$

$$(a\check{b}\check{b})15(a\check{a}, b, \check{b})(a\check{a}, \check{b}, b)$$

$$(a\check{b}\check{b})18(b\check{b}, a, \check{a})(b\check{b}, \check{a}, a)$$

The automorphism group of  $(a\check{a}b\check{b})17$  is  $\{(), (a\check{a}), (b\check{b}), (a\check{a})(b\check{b})\}$ .

$(a\check{a}b\check{b})18$  12 Mandatory: — —  $abb\ bab$  —  $bba\ aaa\ bbb$  —  $bb\check{a}$  —  $b\check{b}$   
5 Forbidden:  $aba\ baa$  — —  $aab$  — — —  $a\check{a}\check{b}$  —  $aa\check{a}$  —



;	$a$	$\check{a}$	$b$	$\check{b}$
$a$	$a$	$1'a\check{a}$	$b\check{b}$	$\check{b}\check{b}$
$\check{a}$	$1'a\check{a}$	$\check{a}$	$b\check{b}$	$\check{b}\check{b}$
$b$	$b\check{b}$	$b\check{b}$	$a\check{a}b\check{b}$	$1'a\check{a}b\check{b}$
$\check{b}$	$b\check{b}$	$b\check{b}$	$1'a\check{a}b\check{b}$	$a\check{a}b\check{b}$

$ D_2  = 4$
$ D_3  = 7$
$ D_4  = 37$
$B_5$ is a basis
$B_6$ is a basis

$$(a\check{a}b\check{b})18 \cong |\supseteq (a)2(a\check{a}b\check{b})$$

$$(a\check{a})3(ab, \check{a}\check{b})(a\check{b}, \check{a}b)(\check{a}b, a\check{b})(\check{a}\check{b}, ab)$$

$$(ab)4(a\check{a}, b\check{b})$$

$$(a\check{b}\check{b})16(a\check{a}, b, \check{b})(a\check{a}, \check{b}, b)$$

$$(a\check{b}\check{b})18(b\check{b}, a, \check{a})(b\check{b}, \check{a}, a)$$

The automorphism group of  $(a\check{a}b\check{b})18$  is  $\{(), (a\check{a}), (b\check{b}), (a\check{a})(b\check{b})\}$ .

$(a\check{a}b\check{b})19$  12 Mandatory: — —  $abb\ bab$  —  $bba\ aaa\ bbb$  —  $bb\check{a}\ aa\check{a}$  —  
 5 Forbidden:  $aba\ baa$  — —  $aab$  — — —  $aab$  — — —  $bb\check{b}$

;	$a$	$\check{a}$	$b$	$\check{b}$
$a$	$a\check{a}$	$1'a\check{a}$	$b\check{b}$	$\check{b}\check{b}$
$\check{a}$	$1'a\check{a}$	$a\check{a}$	$b\check{b}$	$\check{b}\check{b}$
$b$	$b\check{b}$	$b\check{b}$	$a\check{a}b$	$1'a\check{a}b\check{b}$
$\check{b}$	$b\check{b}$	$b\check{b}$	$1'a\check{a}b\check{b}$	$a\check{a}b$

$J$ :	true.
$L$ :	true.
$M$ :	$b_{01} \ a_{02} \ \check{b}_{21} \ \check{b}_{03} \ \check{b}_{32} \ \check{b}_{24} \ \check{b}_{41}$

$ D_2  = 4$
$ D_3  = 7$
$ D_4  = 34$
No 5DB

$$(a\check{a}b\check{b})19 \cong |\supseteq (a)2(a\check{a}b\check{b})$$

$$(a\check{a})3(ab, \check{a}\check{b})(a\check{b}, \check{a}b)(\check{a}b, a\check{b})(\check{a}\check{b}, ab)$$

$$(ab)4(a\check{a}, b\check{b})$$

$$(a\check{b}\check{b})15(a\check{a}, b, \check{b})(a\check{a}, \check{b}, b)$$

$$(a\check{b}\check{b})20(b\check{b}, a, \check{a})(b\check{b}, \check{a}, a)$$

The automorphism group of  $(a\check{a}b\check{b})19$  is  $\{(), (a\check{a}), (b\check{b}), (a\check{a})(b\check{b})\}$ .

$(a\check{a}b\check{b})20$  13 Mandatory: — —  $abb\ bab$  —  $bba\ aaa\ bbb$  —  $bb\check{a}\ aa\check{a}\ bb\check{b}$   
 4 Forbidden:  $aba\ baa$  — —  $aab$  — — —  $aab$  — — —

;	$a$	$\check{a}$	$b$	$\check{b}$
$a$	$a\check{a}$	$1'a\check{a}$	$b\check{b}$	$\check{b}\check{b}$
$\check{a}$	$1'a\check{a}$	$a\check{a}$	$b\check{b}$	$\check{b}\check{b}$
$b$	$b\check{b}$	$b\check{b}$	$a\check{a}b\check{b}$	$1'a\check{a}b\check{b}$
$\check{b}$	$b\check{b}$	$b\check{b}$	$1'a\check{a}b\check{b}$	$a\check{a}b\check{b}$

$ D_2  = 4$
$ D_3  = 8$
$ D_4  = 44$
$B_5$ is a basis
$B_6$ is a basis

$$\begin{aligned}
(a\check{a}b\check{b})20 \cong |\supseteq (a)2(a\check{a}b\check{b}) \\
(a\check{a})3(ab, \check{a}\check{b})(a\check{b}, \check{a}b)(\check{a}b, a\check{b})(\check{a}\check{b}, ab) \\
(ab)4(a\check{a}, b\check{b}) \\
(ab\check{b})16(a\check{a}, b, \check{b})(a\check{a}, \check{b}, b) \\
(ab\check{b})20(b\check{b}, a, \check{a})(b\check{b}, \check{a}, a)
\end{aligned}$$

The automorphism group of  $(a\check{a}b\check{b})20$  is  $\{(), (a\check{a}), (b\check{b}), (a\check{a})(b\check{b})\}$ .

$(a\check{a}b\check{b})21$  12 Mandatory: — —  $abb\ bab\ aab\ bba\ aaa$  —  $a\check{a}\check{b}\check{b}\check{a}$  — —  
5 Forbidden:  $aba\ baa$  — — — —  $bbb$  — —  $aa\check{a}\check{b}\check{b}$

;	$a$	$\check{a}$	$b$	$\check{b}$
$a$	$abb$	$1'a\check{a}$	$\check{a}b\check{b}$	$\check{a}\check{b}\check{b}$
$\check{a}$	$1'a\check{a}$	$\check{a}b\check{b}$	$ab\check{b}$	$ab\check{b}$
$b$	$\check{a}b\check{b}$	$ab\check{b}$	$a\check{a}$	$1'a\check{a}$
$\check{b}$	$\check{a}b\check{b}$	$ab\check{b}$	$1'a\check{a}$	$a\check{a}$

$ D_2  = 4$
$ D_3  = 7$
$ D_4  = 36$
$B_5$ is a basis
$B_6$ is a basis

$$\begin{aligned}
(a\check{a}b\check{b})21 \cong |\supseteq (a)2(a\check{a}b\check{b}) \\
(a\check{a})3(ab, \check{a}\check{b})(a\check{b}, \check{a}b)(\check{a}b, a\check{b})(\check{a}\check{b}, ab) \\
(ab)6(a\check{a}, b\check{b}) \\
(ab\check{b})7(a\check{a}, b, \check{b})(a\check{a}, \check{b}, b) \\
(ab\check{b})21(b\check{b}, a, \check{a})(b\check{b}, \check{a}, a)
\end{aligned}$$

The automorphism group of  $(a\check{a}b\check{b})21$  is  $\{(), (a\check{a}), (b\check{b}), (a\check{a})(b\check{b})\}$ .

$(a\check{a}b\check{b})22$  13 Mandatory: — —  $abb\ bab\ aab\ bba\ aaa$  —  $a\check{a}\check{b}\check{b}\check{a}$  —  $b\check{b}\check{b}$   
4 Forbidden:  $aba\ baa$  — — — —  $bbb$  — —  $aa\check{a}$  —

;	$a$	$\check{a}$	$b$	$\check{b}$
$a$	$a\check{b}\check{b}$	$1'a\check{a}$	$\check{a}b\check{b}$	$\check{a}\check{b}\check{b}$
$\check{a}$	$1'a\check{a}$	$\check{a}b\check{b}$	$a\check{b}\check{b}$	$a\check{b}\check{b}$
$b$	$\check{a}b\check{b}$	$a\check{b}\check{b}$	$a\check{a}\check{b}$	$1'a\check{a}$
$\check{b}$	$\check{a}b\check{b}$	$a\check{b}\check{b}$	$1'a\check{a}$	$a\check{a}\check{b}$

$J$ :	true.
$L$ :	$b_{01} \ a_{02} \ a_{21} \ a_{03} \ \check{b}_{31} \ \check{b}_{04} \ \check{b}_{41}$
$M$ :	$b_{01} \ \check{b}_{02} \ \check{b}_{21} \ a_{03} \ a_{32} \ \check{a}_{24} \ \check{a}_{41}$

$ D_2  = 4$
$ D_3  = 8$
$ D_4  = 41$
No 5DB

$$(a\check{a}b\check{b})22 \cong |\supseteq (a)2(a\check{a}b\check{b})$$

$$(a\check{a})3(ab, \check{a}\check{b})(a\check{b}, \check{a}b)(\check{a}b, a\check{b})(\check{a}\check{b}, ab)$$

$$(ab)7(a\check{a}, b\check{b})(b\check{b}, a\check{a})$$

$$(a\check{b}\check{b})9(a\check{a}, b, \check{b})(a\check{a}, \check{b}, b)$$

$$(a\check{b}\check{b})22(b\check{b}, a, \check{a})(b\check{b}, \check{a}, a)$$

The automorphism group of  $(a\check{a}b\check{b})22$  is  $\{(), (a\check{a}), (b\check{b}), (a\check{a})(b\check{b})\}$ .

$(a\check{a}b\check{b})23$  13 Mandatory: — —  $abb \ bab \ aab \ bba \ aaa$  —  $a\check{a}\check{b} \ b\check{b}\check{a} \ a\check{a}\check{a}$  —  
 4 Forbidden:  $aba \ baa$  — — — —  $bb\check{b}$  — — —  $b\check{b}\check{b}$

;	$a$	$\check{a}$	$b$	$\check{b}$
$a$	$a\check{a}b\check{b}$	$1'a\check{a}$	$\check{a}b\check{b}$	$\check{a}\check{b}\check{b}$
$\check{a}$	$1'a\check{a}$	$a\check{a}b\check{b}$	$a\check{b}\check{b}$	$a\check{b}\check{b}$
$b$	$\check{a}b\check{b}$	$a\check{b}\check{b}$	$a\check{a}$	$1'a\check{a}$
$\check{b}$	$\check{a}b\check{b}$	$a\check{b}\check{b}$	$1'a\check{a}$	$a\check{a}$

$J$ :	$a_{01} \ \check{a}_{02} \ b_{21} \ b_{03} \ b_{31} \ a_{24} \ a_{43}$
$L$ :	$a_{01} \ \check{a}_{02} \ \check{a}_{21} \ \check{a}_{03} \ b_{31} \ b_{04} \ b_{41}$
$M$ :	$a_{01} \ \check{a}_{02} \ \check{a}_{21} \ a_{03} \ b_{32} \ b_{24} \ b_{41}$

$ D_2  = 4$
$ D_3  = 8$
$ D_4  = 45$
No 5DB

$$(a\check{a}b\check{b})23 \cong |\supseteq (a)2(a\check{a}b\check{b})$$

$$(a\check{a})3(ab, \check{a}\check{b})(a\check{b}, \check{a}b)(\check{a}b, a\check{b})(\check{a}\check{b}, ab)$$

$$(ab)6(a\check{a}, b\check{b})$$

$$(a\check{b}\check{b})7(a\check{a}, b, \check{b})(a\check{a}, \check{b}, b)$$

$$(a\check{b}\check{b})23(b\check{b}, a, \check{a})(b\check{b}, \check{a}, a)$$

The automorphism group of  $(a\check{a}b\check{b})23$  is  $\{(), (a\check{a}), (b\check{b}), (a\check{a})(b\check{b})\}$ .

( $a\check{a}b\check{b}$ )24 14 Mandatory: — —  $abb\ bab\ aab\ bba\ aaa$  —  $a\check{a}b\ b\check{b}\check{a}\ a\check{a}\check{b}\ b\check{b}\check{b}$   
 3 Forbidden:  $aba\ baa$  — — — —  $b\check{b}\check{b}$  — — — —

;	$a$	$\check{a}$	$b$	$\check{b}$
$a$	$a\check{a}b\check{b}$	$1'a\check{a}$	$\check{a}b\check{b}$	$\check{a}b\check{b}$
$\check{a}$	$1'a\check{a}$	$a\check{a}b\check{b}$	$ab\check{b}$	$ab\check{b}$
$b$	$\check{a}b\check{b}$	$ab\check{b}$	$a\check{a}b$	$1'a\check{a}$
$\check{b}$	$\check{a}b\check{b}$	$ab\check{b}$	$1'a\check{a}$	$a\check{a}b$

$J$ :	$a_{01}$	$\check{a}_{02}$	$b_{21}$	$b_{03}$	$b_{31}$	$a_{24}$	$a_{43}$
$L$ :	$a_{01}$	$\check{a}_{02}$	$\check{a}_{21}$	$\check{a}_{03}$	$b_{31}$	$b_{04}$	$b_{41}$
$M$ :	$a_{01}$	$\check{a}_{02}$	$\check{a}_{21}$	$a_{03}$	$b_{32}$	$\check{b}_{24}$	$b_{41}$

$ D_2  = 4$
$ D_3  = 9$
$ D_4  = 50$
No 5DB

$$(a\check{a}b\check{b})24 \cong |\supseteq (a)2(a\check{a}b\check{b})$$

$$(a\check{a})3(ab, \check{a}b)(a\check{b}, \check{a}b)(\check{a}b, a\check{b})(\check{a}\check{b}, ab)$$

$$(ab)7(a\check{a}, b\check{b})(b\check{b}, a\check{a})$$

$$(ab\check{b})9(a\check{a}, b, \check{b})(a\check{a}, \check{b}, b)$$

$$(ab\check{b})24(b\check{b}, a, \check{a})(b\check{b}, \check{a}, a)$$

The automorphism group of ( $a\check{a}b\check{b}$ )24 is  $\{(), (a\check{a}), (b\check{b}), (a\check{a})(b\check{b})\}$ .

( $a\check{a}b\check{b}$ )25 13 Mandatory: — —  $abb\ bab\ aab\ bba\ aaa\ bbb\ a\check{a}b\ b\check{b}\check{a}$  — —  
 4 Forbidden:  $aba\ baa$  — — — — — — — —  $a\check{a}\check{a}\ b\check{b}\check{b}$

;	$a$	$\check{a}$	$b$	$\check{b}$
$a$	$ab\check{b}$	$1'a\check{a}$	$\check{a}b\check{b}$	$\check{a}b\check{b}$
$\check{a}$	$1'a\check{a}$	$\check{a}b\check{b}$	$ab\check{b}$	$ab\check{b}$
$b$	$\check{a}b\check{b}$	$ab\check{b}$	$a\check{a}b$	$1'a\check{a}b\check{b}$
$\check{b}$	$\check{a}b\check{b}$	$ab\check{b}$	$1'a\check{a}b\check{b}$	$a\check{a}\check{b}$

$J$ :	true.
$L$ :	true.
$M$ :	$b_{01}$ $b_{02}$ $b_{21}$ $a_{03}$ $a_{32}$ $\check{a}_{24}$ $\check{a}_{41}$

$ D_2  = 4$
$ D_3  = 8$
$ D_4  = 58$
No 5DB

$$(a\check{a}b\check{b})25 \cong |\supseteq (a)2(a\check{a}b\check{b})$$

$$(a\check{a})3(ab, \check{a}b)(a\check{b}, \check{a}b)(\check{a}b, a\check{b})(\check{a}\check{b}, ab)$$

$$(ab)7(a\check{a}, b\check{b})(b\check{b}, a\check{a})$$

$$(ab\check{b})22(b\check{b}, a, \check{a})(b\check{b}, \check{a}, a)$$

$$(ab\check{b})35(a\check{a}, b, \check{b})(a\check{a}, \check{b}, b)$$

The automorphism group of  $(a\check{a}b\check{b})25$  is  $\{(), (a\check{a}), (b\check{b}), (a\check{a})(b\check{b})\}$ .

$(a\check{a}b\check{b})26$  14 Mandatory: — —  $abb\ bab\ aab\ bba\ aaa\ bbb\ aab\ bb\check{a}$  —  $bb\check{b}$

3 Forbidden:  $aba\ baa$  — — — — —  $aa\check{a}$  —

;	$a$	$\check{a}$	$b$	$\check{b}$
$a$	$ab\check{b}$	$1'a\check{a}$	$\check{a}b\check{b}$	$\check{a}b\check{b}$
$\check{a}$	$1'a\check{a}$	$\check{a}b\check{b}$	$ab\check{b}$	$ab\check{b}$
$b$	$\check{a}b\check{b}$	$ab\check{b}$	$a\check{a}b\check{b}$	$1'a\check{a}b\check{b}$
$\check{b}$	$\check{a}b\check{b}$	$ab\check{b}$	$1'a\check{a}b\check{b}$	$a\check{a}b\check{b}$

$J$ :	true.
$L$ :	true.
$M$ :	$b_{01}\ b_{02}\ b_{21}\ a_{03}\ a_{32}\ \check{a}_{24}\ \check{a}_{41}$

$ D_2  = 4$
$ D_3  = 9$
$ D_4  = 72$
No 5DB

$$(a\check{a}b\check{b})26 \cong |\supseteq (a)2(a\check{a}b\check{b})$$

$$(a\check{a})3(ab, \check{a}b)(a\check{b}, \check{a}b)(\check{a}b, a\check{b})(\check{a}\check{b}, ab)$$

$$(ab)7(a\check{a}, b\check{b})(b\check{b}, a\check{a})$$

$$(ab\check{b})22(b\check{b}, a, \check{a})(b\check{b}, \check{a}, a)$$

$$(ab\check{b})37(a\check{a}, b, \check{b})(a\check{a}, \check{b}, b)$$

The automorphism group of  $(a\check{a}b\check{b})26$  is  $\{(), (a\check{a}), (b\check{b}), (a\check{a})(b\check{b})\}$ .

$(a\check{a}b\check{b})27$  14 Mandatory: — —  $abb\ bab\ aab\ bba\ aaa\ bbb\ aab\ bb\check{a}\ aa\check{a}$  —

3 Forbidden:  $aba\ baa$  — — — — —  $bb\check{b}$

;	$a$	$\check{a}$	$b$	$\check{b}$
$a$	$a\check{a}b\check{b}$	$1'a\check{a}$	$\check{a}b\check{b}$	$\check{a}b\check{b}$
$\check{a}$	$1'a\check{a}$	$a\check{a}b\check{b}$	$ab\check{b}$	$ab\check{b}$
$b$	$\check{a}b\check{b}$	$ab\check{b}$	$a\check{a}b$	$1'a\check{a}b\check{b}$
$\check{b}$	$\check{a}b\check{b}$	$ab\check{b}$	$1'a\check{a}b\check{b}$	$a\check{a}b$

$J$ :	$a_{01}\ \check{a}_{02}\ b_{21}\ b_{03}\ b_{31}\ a_{24}\ a_{43}$
$L$ :	true.
$M$ :	$b_{01}\ b_{02}\ b_{21}\ a_{03}\ a_{32}\ \check{a}_{24}\ \check{a}_{41}$

$ D_2  = 4$
$ D_3  = 9$
$ D_4  = 67$
No 5DB

$$(a\check{a}b\check{b})27 \cong |\supseteq (a)2(a\check{a}b\check{b})$$

$$(a\check{a})3(ab, \check{a}b)(a\check{b}, \check{a}b)(\check{a}b, a\check{b})(\check{a}\check{b}, ab)$$

$$(ab)7(a\check{a}, b\check{b})(b\check{b}, a\check{a})$$

$$(ab\check{b})24(b\check{b}, a, \check{a})(b\check{b}, \check{a}, a)$$

$$(abb)35(a\check{a}, b, \check{b})(a\check{a}, \check{b}, b)$$

The automorphism group of  $(a\check{a}b\check{b})27$  is  $\{(), (a\check{a}), (b\check{b}), (a\check{a})(b\check{b})\}$ .

$(a\check{a}b\check{b})28$  15 Mandatory: — —  $abb\ bab\ aab\ bba\ aaa\ bbb\ aab\ bb\check{a}\ aa\check{a}\ bb\check{b}$   
 2 Forbidden:  $aba\ baa$  — — — — — — — — — —

;	$a$	$\check{a}$	$b$	$\check{b}$
$a$	$a\check{a}b\check{b}$	$1'a\check{a}$	$\check{a}b\check{b}$	$\check{a}b\check{b}$
$\check{a}$	$1'a\check{a}$	$a\check{a}b\check{b}$	$ab\check{b}$	$ab\check{b}$
$b$	$\check{a}b\check{b}$	$ab\check{b}$	$a\check{a}b\check{b}$	$1'a\check{a}b\check{b}$
$\check{b}$	$\check{a}b\check{b}$	$ab\check{b}$	$1'a\check{a}b\check{b}$	$a\check{a}b\check{b}$

$J$ :	$a_{01}$	$\check{a}_{02}$	$b_{21}$	$b_{03}$	$b_{31}$	$a_{24}$	$a_{43}$
$L$ :	true.						
$M$ :	$b_{01}$	$b_{02}$	$b_{21}$	$a_{03}$	$a_{32}$	$\check{a}_{24}$	$\check{a}_{41}$

$ D_2  = 4$
$ D_3  = 10$
$ D_4  = 81$
No 5DB

$$(a\check{a}b\check{b})28 \cong |\supseteq (a)2(a\check{a}b\check{b})$$

$$(a\check{a})3(ab, \check{a}b)(a\check{b}, \check{a}b)(\check{a}b, a\check{b})(\check{a}\check{b}, ab)$$

$$(ab)7(a\check{a}, b\check{b})(b\check{b}, a\check{a})$$

$$(ab\check{b})24(b\check{b}, a, \check{a})(b\check{b}, \check{a}, a)$$

$$(ab\check{b})37(a\check{a}, b, \check{b})(a\check{a}, \check{b}, b)$$

The automorphism group of  $(a\check{a}b\check{b})28$  is  $\{(), (a\check{a}), (b\check{b}), (a\check{a})(b\check{b})\}$ .

$(a\check{a}b\check{b})29$  10 Mandatory: —  $baa\ abb\ bab$  — —  $aaa\ bbb$  — — — —  
 7 Forbidden:  $aba$  — — —  $aab\ bba$  — —  $aab\ bb\check{a}\ aa\check{a}\ bb\check{b}$

;	$a$	$\check{a}$	$b$	$\check{b}$
$a$	$a$	$1'a\check{a}b\check{b}$	$b$	$\check{b}$
$\check{a}$	$1'a\check{a}$	$\check{a}$	$\check{a}b$	$\check{a}\check{b}$
$b$	$ab$	$b$	$b$	$1'a\check{a}b\check{b}$
$\check{b}$	$a\check{b}$	$\check{b}$	$1'a\check{a}b\check{b}$	$\check{b}$

$ D_2  = 4$
$ D_3  = 5$
$ D_4  = 14$
$B_5$ is a basis
$B_6$ is a basis

$$(a\check{a}b\check{b})29 \cong |\supseteq (a)2(a\check{a}b\check{b})$$

$$(a\check{a})2(ab, \check{a}b)(a\check{b}, \check{a}b)(\check{a}b, a\check{b})(\check{a}\check{b}, ab)$$

$$(ab\check{b})25(b\check{b}, \check{a}, a)$$

The automorphism group of  $(a\check{a}b\check{b})29$  is  $\{(), (b\check{b})\}$ .

( $a\check{a}b\check{b}$ )30 11 Mandatory: —  $baa\ abb\ bab$  — —  $aaa\ bbb$  — — —  $bb\check{b}$   
 6 Forbidden:  $aba$  — — —  $aab\ bba$  — — —  $aab\ bb\check{a}\ aa\check{a}$  —

;	$a$	$\check{a}$	$b$	$\check{b}$
$a$	$a$	$1'a\check{a}b\check{b}$	$b$	$\check{b}$
$\check{a}$	$1'a\check{a}$	$\check{a}$	$\check{a}b$	$\check{a}\check{b}$
$b$	$ab$	$b$	$b\check{b}$	$1'a\check{a}b\check{b}$
$\check{b}$	$a\check{b}$	$\check{b}$	$1'a\check{a}b\check{b}$	$b\check{b}$

$ D_2  = 4$
$ D_3  = 6$
$ D_4  = 19$
$B_5$ is a basis
$B_6$ is a basis

$$(a\check{a}b\check{b})30 \cong |\supseteq (a)2(a\check{a}b\check{b})$$

$$(ab\check{b})25(b\check{b}, \check{a}, a)$$

The automorphism group of ( $a\check{a}b\check{b}$ )30 is  $\{(), (b\check{b})\}$ .

( $a\check{a}b\check{b}$ )31 11 Mandatory: —  $baa\ abb\ bab$  — —  $aaa\ bbb$  —  $bb\check{a}$  — —  
 6 Forbidden:  $aba$  — — —  $aab\ bba$  — — —  $aab\check{b}$  —  $aa\check{a}\ b\check{b}$

;	$a$	$\check{a}$	$b$	$\check{b}$
$a$	$a$	$1'a\check{a}b\check{b}$	$b\check{b}$	$\check{b}$
$\check{a}$	$1'a\check{a}$	$\check{a}$	$\check{a}b$	$\check{a}\check{b}$
$b$	$ab\check{b}$	$b$	$\check{a}b$	$1'a\check{a}b\check{b}$
$\check{b}$	$a\check{b}$	$b\check{b}$	$1'a\check{a}b\check{b}$	$a\check{b}$

$ D_2  = 4$
$ D_3  = 6$
$ D_4  = 24$
$B_5$ is a basis
$B_6$ is a basis

$$(a\check{a}b\check{b})31 \cong |\supseteq (a)2(a\check{a}b\check{b})$$

$$(a\check{a})2(a\check{b}, \check{a}b)(\check{a}b, a\check{b})$$

$$(a\check{a})3(ab, \check{a}\check{b})(\check{a}\check{b}, ab)$$

$$(ab\check{b})25(b\check{b}, \check{a}, a)$$

The automorphism group of ( $a\check{a}b\check{b}$ )31 is  $\{()\}$ .

( $a\check{a}b\check{b}$ )32 12 Mandatory: —  $baa\ abb\ bab$  — —  $aaa\ bbb$  —  $bb\check{a}$  —  $b\check{b}$   
 5 Forbidden:  $aba$  — — —  $aab\ bba$  — — —  $aab\check{b}$  —  $aa\check{a}$  —

;	$a$	$\check{a}$	$b$	$\check{b}$
$a$	$a$	$1'a\check{a}b\check{b}$	$b\check{b}$	$\check{b}$
$\check{a}$	$1'a\check{a}$	$\check{a}$	$\check{a}b$	$\check{a}\check{b}$
$b$	$ab\check{b}$	$b$	$\check{a}b\check{b}$	$1'a\check{a}b\check{b}$
$\check{b}$	$a\check{b}$	$b\check{b}$	$1'a\check{a}b\check{b}$	$ab\check{b}$

$ D_2  = 4$
$ D_3  = 7$
$ D_4  = 32$
$B_5$ is a basis
$B_6$ is a basis

$$(a\check{a}b\check{b})32 \cong |\supseteq (a)2(a\check{a}b\check{b})$$

$$(a\check{a})3(ab, \check{a}\check{b})(\check{a}\check{b}, ab)$$

$$(abb)25(b\check{b}, \check{a}, a)$$

The automorphism group of  $(a\check{a}b\check{b})32$  is  $\{()\}$ .

$(a\check{a}b\check{b})33$  12 Mandatory:  $— baa abb bab — bba aaa bbb — bb\check{a} — —$   
 5 Forbidden:  $aba — — — aab — — — aab\check{b} — aa\check{a} b\check{b}$

;	$a$	$\check{a}$	$b$	$\check{b}$
$a$	$a$	$1'a\check{a}b\check{b}$	$b\check{b}$	$b\check{b}$
$\check{a}$	$1'a\check{a}$	$\check{a}$	$\check{a}b\check{b}$	$\check{a}b\check{b}$
$b$	$ab\check{b}$	$b\check{b}$	$a\check{a}b$	$1'a\check{a}b\check{b}$
$\check{b}$	$ab\check{b}$	$b\check{b}$	$1'a\check{a}b\check{b}$	$a\check{a}b$

$ D_2  = 4$
$ D_3  = 7$
$ D_4  = 39$
No 5DB

$$(a\check{a}b\check{b})33 \cong |\supseteq (a)2(a\check{a}b\check{b})$$

$$(a\check{a})3(ab, \check{a}\check{b})(a\check{b}, \check{a}b)(\check{a}b, a\check{b})(\check{a}\check{b}, ab)$$

$$(abb)25(b\check{b}, \check{a}, a)$$

The automorphism group of  $(a\check{a}b\check{b})33$  is  $\{(), (b\check{b})\}$ .

$(a\check{a}b\check{b})34$  13 Mandatory:  $— baa abb bab — bba aaa bbb — bb\check{a} — b\check{b}$   
 4 Forbidden:  $aba — — — aab — — — aab\check{b} — aa\check{a} —$

;	$a$	$\check{a}$	$b$	$\check{b}$
$a$	$a$	$1'a\check{a}b\check{b}$	$b\check{b}$	$b\check{b}$
$\check{a}$	$1'a\check{a}$	$\check{a}$	$\check{a}b\check{b}$	$\check{a}b\check{b}$
$b$	$ab\check{b}$	$b\check{b}$	$a\check{a}b\check{b}$	$1'a\check{a}b\check{b}$
$\check{b}$	$ab\check{b}$	$b\check{b}$	$1'a\check{a}b\check{b}$	$a\check{a}b\check{b}$

$ D_2  = 4$
$ D_3  = 8$
$ D_4  = 52$
$B_5$ is a basis
$B_6$ is a basis

$$(a\check{a}b\check{b})34 \cong |\supseteq (a)2(a\check{a}b\check{b})$$

$$(a\check{a})3(ab, \check{a}\check{b})(a\check{b}, \check{a}b)(\check{a}b, a\check{b})(\check{a}\check{b}, ab)$$

$$(abb)25(b\check{b}, \check{a}, a)$$



The automorphism group of  $(a\check{a}b\check{b})34$  is  $\{(), (b\check{b})\}$ .

$(a\check{a}b\check{b})35$  13 Mandatory: —  $baa\ abb\ bab\ aab\ bba\ aaa$  —  $a\check{a}\check{b}\ b\check{b}\check{a}$  — —  
 4 Forbidden:  $aba$  — — — — —  $bbb$  — — —  $a\check{a}\check{a}\ b\check{b}\check{b}$

;	$a$	$\check{a}$	$b$	$\check{b}$
$a$	$ab\check{b}$	$1'a\check{a}b\check{b}$	$\check{a}b\check{b}$	$\check{a}b\check{b}$
$\check{a}$	$1'a\check{a}$	$\check{a}b\check{b}$	$a\check{a}b\check{b}$	$a\check{a}b\check{b}$
$b$	$a\check{a}b\check{b}$	$ab\check{b}$	$a\check{a}$	$1'a\check{a}$
$\check{b}$	$a\check{a}b\check{b}$	$ab\check{b}$	$1'a\check{a}$	$a\check{a}$

$J$ :	$a_{01}$	$\check{a}_{02}$	$b_{21}$	$b_{03}$	$b_{31}$	$\check{a}_{24}$	$b_{43}$
$L$ :	$a_{01}$	$\check{a}_{02}$	$b_{21}$	$b_{03}$	$a_{31}$	$b_{04}$	$b_{41}$
$M$ :	$a_{01}$	$b_{02}$	$a_{21}$	$a_{03}$	$a_{32}$	$b_{24}$	$\check{a}_{41}$

$ D_2  = 4$
$ D_3  = 8$
$ D_4  = 55$
No 5DB

- $(a\check{a}b\check{b})35 \cong |\supseteq (a)2(a\check{a}b\check{b})$   
 $(a\check{a})3(ab, \check{a}b)(a\check{b}, \check{a}b)(\check{a}b, a\check{b})(\check{a}\check{b}, ab)$   
 $(ab)6(a\check{a}, b\check{b})$   
 $(ab\check{b})7(a\check{a}, b, \check{b})(a\check{a}, \check{b}, b)$   
 $(ab\check{b})26(b\check{b}, \check{a}, a)$

The automorphism group of  $(a\check{a}b\check{b})35$  is  $\{(), (b\check{b})\}$ .

$(a\check{a}b\check{b})36$  14 Mandatory: —  $baa\ abb\ bab\ aab\ bba\ aaa$  —  $a\check{a}\check{b}\ b\check{b}\check{a}$  —  $b\check{b}\check{b}$   
 3 Forbidden:  $aba$  — — — — —  $bbb$  — — —  $a\check{a}\check{a}$  —

;	$a$	$\check{a}$	$b$	$\check{b}$
$a$	$ab\check{b}$	$1'a\check{a}b\check{b}$	$\check{a}b\check{b}$	$\check{a}b\check{b}$
$\check{a}$	$1'a\check{a}$	$\check{a}b\check{b}$	$a\check{a}b\check{b}$	$a\check{a}b\check{b}$
$b$	$a\check{a}b\check{b}$	$ab\check{b}$	$a\check{a}\check{b}$	$1'a\check{a}$
$\check{b}$	$a\check{a}b\check{b}$	$ab\check{b}$	$1'a\check{a}$	$a\check{a}b$

$J$ :	$a_{01}$	$\check{a}_{02}$	$b_{21}$	$b_{03}$	$\check{b}_{31}$	$\check{a}_{24}$	$b_{43}$
$L$ :	$a_{01}$	$\check{a}_{02}$	$b_{21}$	$b_{03}$	$a_{31}$	$b_{04}$	$b_{41}$
$M$ :	$a_{01}$	$b_{02}$	$a_{21}$	$a_{03}$	$a_{32}$	$\check{b}_{24}$	$\check{a}_{41}$

$ D_2  = 4$
$ D_3  = 9$
$ D_4  = 64$
No 5DB

- $(a\check{a}b\check{b})36 \cong |\supseteq (a)2(a\check{a}b\check{b})$   
 $(a\check{a})3(ab, \check{a}b)(a\check{b}, \check{a}b)(\check{a}b, a\check{b})(\check{a}\check{b}, ab)$   
 $(ab)7(a\check{a}, b\check{b})(b\check{b}, a\check{a})$   
 $(ab\check{b})9(a\check{a}, b, \check{b})(a\check{a}, \check{b}, b)$

$$(abb)27(b\check{b}, \check{a}, a)$$

The automorphism group of  $(a\check{a}b\check{b})36$  is  $\{(), (b\check{b})\}$ .

$(a\check{a}b\check{b})37$  14 Mandatory: —  $baa\ abb\ bab\ aab\ bba\ aaa$  —  $aab\ bb\check{a}\ aa\check{a}$  —  
3 Forbidden:  $aba$  — — — — —  $bbb$  — — —  $bb\check{b}$

;	$a$	$\check{a}$	$b$	$\check{b}$
$a$	$a\check{a}b\check{b}$	$1'a\check{a}b\check{b}$	$\check{a}b\check{b}$	$\check{a}b\check{b}$
$\check{a}$	$1'a\check{a}$	$a\check{a}b\check{b}$	$a\check{a}b\check{b}$	$a\check{a}b\check{b}$
$b$	$a\check{a}b\check{b}$	$ab\check{b}$	$a\check{a}$	$1'a\check{a}$
$\check{b}$	$a\check{a}b\check{b}$	$ab\check{b}$	$1'a\check{a}$	$a\check{a}$

$J$ :	$a_{01}$	$b_{02}$	$\check{a}_{21}$	$b_{03}$	$b_{31}$	$b_{24}$	$a_{43}$
$L$ :	$a_{01}$	$\check{a}_{02}$	$b_{21}$	$b_{03}$	$a_{31}$	$b_{04}$	$b_{41}$
$M$ :	$b_{01}$	$a_{02}$	$\check{a}_{21}$	$\check{a}_{03}$	$b_{32}$	$b_{24}$	$a_{41}$

$ D_2  = 4$
$ D_3  = 9$
$ D_4  = 70$
No 5DB

$$(a\check{a}b\check{b})37 \cong |\supseteq (a)2(a\check{a}b\check{b})$$

$$(a\check{a})3(ab, \check{a}b)(a\check{b}, \check{a}b)(\check{a}b, a\check{b})(\check{a}b, ab)$$

$$(ab)6(a\check{a}, b\check{b})$$

$$(ab\check{b})7(a\check{a}, b, \check{b})(a\check{a}, \check{b}, b)$$

$$(ab\check{b})28(b\check{b}, \check{a}, a)$$

The automorphism group of  $(a\check{a}b\check{b})37$  is  $\{(), (b\check{b})\}$ .

$(a\check{a}b\check{b})38$  15 Mandatory: —  $baa\ abb\ bab\ aab\ bba\ aaa$  —  $aab\ bb\check{a}\ aa\check{a}\ bb\check{b}$   
2 Forbidden:  $aba$  — — — — —  $bbb$  — — —

;	$a$	$\check{a}$	$b$	$\check{b}$
$a$	$a\check{a}b\check{b}$	$1'a\check{a}b\check{b}$	$\check{a}b\check{b}$	$\check{a}b\check{b}$
$\check{a}$	$1'a\check{a}$	$a\check{a}b\check{b}$	$a\check{a}b\check{b}$	$a\check{a}b\check{b}$
$b$	$a\check{a}b\check{b}$	$ab\check{b}$	$a\check{a}b$	$1'a\check{a}$
$\check{b}$	$a\check{a}b\check{b}$	$ab\check{b}$	$1'a\check{a}$	$a\check{a}b$

$J$ :	$a_{01}$	$b_{02}$	$\check{a}_{21}$	$b_{03}$	$b_{31}$	$\check{b}_{24}$	$a_{43}$
$L$ :	$a_{01}$	$\check{a}_{02}$	$b_{21}$	$b_{03}$	$a_{31}$	$b_{04}$	$b_{41}$
$M$ :	$b_{01}$	$a_{02}$	$\check{a}_{21}$	$\check{a}_{03}$	$b_{32}$	$\check{b}_{24}$	$a_{41}$

$ D_2  = 4$
$ D_3  = 10$
$ D_4  = 79$
No 5DB

$$(a\check{a}b\check{b})38 \cong |\supseteq (a)2(a\check{a}b\check{b})$$

$$(a\check{a})3(ab, \check{a}b)(a\check{b}, \check{a}b)(\check{a}b, a\check{b})(\check{a}b, ab)$$

$$(ab)7(a\check{a}, b\check{b})(b\check{b}, a\check{a})$$

$$(abb)9(a\check{a}, b, \check{b})(a\check{a}, \check{b}, b)$$

$$(abb)29(b\check{b}, \check{a}, a)$$

The automorphism group of  $(a\check{a}b\check{b})38$  is  $\{(), (b\check{b})\}$ .

$(a\check{a}b\check{b})39$  14 Mandatory: —  $baa\ abb\ bab\ aab\ bba\ aaa\ bbb\ aab\ bb\check{a}$  — —  
 3 Forbidden:  $aba$  — — — — — — — — —  $aa\check{a}\ b\check{b}$

;	$a$	$\check{a}$	$b$	$\check{b}$
$a$	$abb$	$1'a\check{a}b\check{b}$	$\check{a}b\check{b}$	$\check{a}b\check{b}$
$\check{a}$	$1'a\check{a}$	$\check{a}b\check{b}$	$a\check{a}b\check{b}$	$a\check{a}b\check{b}$
$b$	$a\check{a}b\check{b}$	$abb$	$a\check{a}b$	$1'a\check{a}b\check{b}$
$\check{b}$	$a\check{a}b\check{b}$	$abb$	$1'a\check{a}b\check{b}$	$a\check{a}b$

$ D_2  = 4$
$ D_3  = 9$
$ D_4  = 87$
No 5DB

$$(a\check{a}b\check{b})39 \cong |\supseteq (a)2(a\check{a}b\check{b})$$

$$(a\check{a})3(ab, \check{a}b)(a\check{b}, \check{a}b)(\check{a}b, a\check{b})(\check{a}b, ab)$$

$$(ab)7(a\check{a}, b\check{b})(b\check{b}, a\check{a})$$

$$(abb)27(b\check{b}, \check{a}, a)$$

$$(abb)35(a\check{a}, b, \check{b})(a\check{a}, \check{b}, b)$$

The automorphism group of  $(a\check{a}b\check{b})39$  is  $\{(), (b\check{b})\}$ .

$(a\check{a}b\check{b})40$  15 Mandatory: —  $baa\ abb\ bab\ aab\ bba\ aaa\ bbb\ aab\ bb\check{a}$  —  $b\check{b}$   
 2 Forbidden:  $aba$  — — — — — — — — —  $aa\check{a}$  —

;	$a$	$\check{a}$	$b$	$\check{b}$
$a$	$abb$	$1'a\check{a}b\check{b}$	$\check{a}b\check{b}$	$\check{a}b\check{b}$
$\check{a}$	$1'a\check{a}$	$\check{a}b\check{b}$	$a\check{a}b\check{b}$	$a\check{a}b\check{b}$
$b$	$a\check{a}b\check{b}$	$abb$	$a\check{a}b\check{b}$	$1'a\check{a}b\check{b}$
$\check{b}$	$a\check{a}b\check{b}$	$abb$	$1'a\check{a}b\check{b}$	$a\check{a}b\check{b}$

$ D_2  = 4$
$ D_3  = 10$
$ D_4  = 105$
No 5DB

$$(a\check{a}b\check{b})40 \cong |\supseteq (a)2(a\check{a}b\check{b})$$

$$(a\check{a})3(ab, \check{a}b)(a\check{b}, \check{a}b)(\check{a}b, a\check{b})(\check{a}b, ab)$$

$$(ab)7(a\check{a}, b\check{b})(b\check{b}, a\check{a})$$

$$(abb)27(b\check{b}, \check{a}, a)$$

$$(abb)37(a\check{a}, b, \check{b})(a\check{a}, \check{b}, b)$$

The automorphism group of  $(a\check{a}b\check{b})40$  is  $\{(), (b\check{b})\}$ .

$(a\check{a}b\check{b})41$  15 Mandatory: —  $baa\ abb\ bab\ aab\ bba\ aaa\ bbb\ aab\ bb\check{a}\ aa\check{a}$  —  
 2 Forbidden:  $aba$  — — — — — — — — —  $bb\check{b}$

;	$a$	$\check{a}$	$b$	$\check{b}$
$a$	$a\check{a}b\check{b}$	$1'a\check{a}b\check{b}$	$\check{a}b\check{b}$	$\check{a}b\check{b}$
$\check{a}$	$1'a\check{a}$	$a\check{a}b\check{b}$	$a\check{a}b\check{b}$	$a\check{a}b\check{b}$
$b$	$a\check{a}b\check{b}$	$ab\check{b}$	$a\check{a}b$	$1'a\check{a}b\check{b}$
$\check{b}$	$a\check{a}b\check{b}$	$ab\check{b}$	$1'a\check{a}b\check{b}$	$a\check{a}b$

$ D_2  = 4$
$ D_3  = 10$
$ D_4  = 102$
$B_5$ is a basis
$B_6$ is a basis

$$(a\check{a}b\check{b})41 \cong |\supseteq (a)2(a\check{a}b\check{b})$$

$$(a\check{a})3(ab, \check{a}b)(a\check{b}, \check{a}b)(\check{a}b, a\check{b})(\check{a}b, ab)$$

$$(ab)7(a\check{a}, b\check{b})(b\check{b}, a\check{a})$$

$$(ab\check{b})29(b\check{b}, \check{a}, a)$$

$$(ab\check{b})35(a\check{a}, b, \check{b})(a\check{a}, \check{b}, b)$$

The automorphism group of  $(a\check{a}b\check{b})41$  is  $\{(), (b\check{b})\}$ .

$(a\check{a}b\check{b})42$  16 Mandatory: —  $baa\ abb\ bab\ aab\ bba\ aaa\ bbb\ aab\ bb\check{a}\ aa\check{a}\ bb\check{b}$  —  
 1 Forbidden:  $aba$  — — — — — — — — —

;	$a$	$\check{a}$	$b$	$\check{b}$
$a$	$a\check{a}b\check{b}$	$1'a\check{a}b\check{b}$	$\check{a}b\check{b}$	$\check{a}b\check{b}$
$\check{a}$	$1'a\check{a}$	$a\check{a}b\check{b}$	$a\check{a}b\check{b}$	$a\check{a}b\check{b}$
$b$	$a\check{a}b\check{b}$	$ab\check{b}$	$a\check{a}b\check{b}$	$1'a\check{a}b\check{b}$
$\check{b}$	$a\check{a}b\check{b}$	$ab\check{b}$	$1'a\check{a}b\check{b}$	$a\check{a}b\check{b}$

$ D_2  = 4$
$ D_3  = 11$
$ D_4  = 120$
$B_5$ is a basis
$B_6$ is a basis

$$(a\check{a}b\check{b})42 \cong |\supseteq (a)2(a\check{a}b\check{b})$$

$$(a\check{a})3(ab, \check{a}b)(a\check{b}, \check{a}b)(\check{a}b, a\check{b})(\check{a}b, ab)$$

$$(ab)7(a\check{a}, b\check{b})(b\check{b}, a\check{a})$$

$$(ab\check{b})29(b\check{b}, \check{a}, a)$$

$$(ab\check{b})37(a\check{a}, b, \check{b})(a\check{a}, \check{b}, b)$$

The automorphism group of  $(a\check{a}b\check{b})42$  is  $\{(), (b\check{b})\}$ .

$(a\check{a}b\check{b})43$  12 Mandatory:  $aba\ baa\ abb\ bab$  — — —  $bbb\ aab\check{b}$  —  $aa\check{a}$  —  
 5 Forbidden: — — — —  $aab\ bba\ aaa$  — —  $bb\check{a}$  —  $bb\check{b}$

;	$a$	$\check{a}$	$b$	$\check{b}$
$a$	$\check{a}\check{b}$	$1'b\check{b}$	$a\check{a}b$	$a\check{b}$
$\check{a}$	$1'b\check{b}$	$ab$	$\check{a}b$	$a\check{a}\check{b}$
$b$	$a\check{a}b$	$\check{a}b$	$b$	$1'a\check{a}b\check{b}$
$\check{b}$	$a\check{b}$	$a\check{a}\check{b}$	$1'a\check{a}b\check{b}$	$\check{b}$

$J$ :	$a_{01}$	$\check{a}_{02}$	$\check{b}_{21}$	$\check{b}_{03}$	$b_{31}$	$\check{a}_{24}$	$a_{43}$
$L$ :	true.						
$M$ :	$a_{01}$	$a_{02}$	$b_{21}$	$\check{a}_{03}$	$\check{a}_{32}$	$\check{a}_{24}$	$\check{a}_{41}$

$ D_2  = 4$
$ D_3  = 7$
$ D_4  = 28$
No 5DB

$$\begin{aligned}
 (a\check{a}b\check{b})43 &\cong |\supseteq (a)2(a\check{a}b\check{b}) \\
 &\quad (a\check{a})3(ab, \check{a}\check{b})(\check{a}\check{b}, ab) \\
 &\quad (ab)7(a\check{a}, b\check{b})(b\check{b}, a\check{a}) \\
 &\quad (a\check{b}\check{b})31(a\check{a}, b, \check{b})(a\check{a}, \check{b}, b)
 \end{aligned}$$

The automorphism group of  $(a\check{a}b\check{b})43$  is  $\{(), (a\check{a})(b\check{b})\}$ .

$(a\check{a}b\check{b})44$     12 Mandatory:  $aba\ baa\ abb\ bab$  — — —  $bbb\ aab\ bb\check{a}$  — —  
 5 Forbidden: — — — —  $aab\ bba\ aaa$  — — —  $aa\check{a}\ b\check{b}\check{b}$

;	$a$	$\check{a}$	$b$	$\check{b}$
$a$	$\check{b}$	$1'b\check{b}$	$a\check{a}b\check{b}$	$a\check{b}$
$\check{a}$	$1'b\check{b}$	$b$	$\check{a}b$	$a\check{a}b\check{b}$
$b$	$a\check{a}b\check{b}$	$\check{a}b$	$\check{a}b$	$1'a\check{a}b\check{b}$
$\check{b}$	$a\check{b}$	$a\check{a}b\check{b}$	$1'a\check{a}b\check{b}$	$a\check{b}$

$ D_2  = 4$
$ D_3  = 7$
$ D_4  = 41$
$B_5$ is a basis
$B_6$ is a basis

$$\begin{aligned}
 (a\check{a}b\check{b})44 &\cong |\supseteq (a)2(a\check{a}b\check{b}) \\
 &\quad (a\check{a})2(a\check{b}, \check{a}b)(\check{a}b, a\check{b}) \\
 &\quad (a\check{a})3(ab, \check{a}\check{b})(\check{a}\check{b}, ab) \\
 &\quad (ab)6(b\check{b}, a\check{a})
 \end{aligned}$$

The automorphism group of  $(a\check{a}b\check{b})44$  is  $\{(), (a\check{a})(b\check{b})\}$ .

$(a\check{a}b\check{b})45$     11 Mandatory:  $aba\ baa\ abb\ bab$  — — —  $aaa\ bbb$  — — — —  
 6 Forbidden: — — — —  $aab\ bba$  — — —  $aa\check{b}\ b\check{b}\check{a}\ aa\check{a}\ b\check{b}\check{b}$

;	$a$	$\check{a}$	$b$	$\check{b}$
$a$	$a$	$1'a\check{a}b\check{b}$	$ab$	$a\check{b}$
$\check{a}$	$1'a\check{a}b\check{b}$	$\check{a}$	$\check{a}b$	$\check{a}\check{b}$
$b$	$ab$	$\check{a}b$	$b$	$1'a\check{a}b\check{b}$
$\check{b}$	$a\check{b}$	$\check{a}\check{b}$	$1'a\check{a}b\check{b}$	$\check{b}$

$ D_2  = 4$
$ D_3  = 6$
$ D_4  = 24$
$B_5$ is a basis
$B_6$ is a basis

$$(a\check{a}b\check{b})45 \cong |\supseteq (a)2(a\check{a}b\check{b})$$

$$(a\check{a})2(ab, \check{a}\check{b})(a\check{b}, \check{a}b)(\check{a}b, a\check{b})(\check{a}\check{b}, ab)$$

$$(ab)7(a\check{a}, b\check{b})(b\check{b}, a\check{a})$$

$$(a\check{b}\check{b})31(a\check{a}, b, \check{b})(a\check{a}, \check{b}, b)(b\check{b}, a, \check{a})(b\check{b}, \check{a}, a)$$

The automorphism group of  $(a\check{a}b\check{b})45$  is  $\{(), (a\check{a}), (b\check{b}), (a\check{a})(b\check{b}), (ab)(\check{a}\check{b}), (a\check{b}\check{a}b), (a\check{b})(\check{a}b)\}$ .

$(a\check{a}b\check{b})46$  12 Mandatory:  $aba\ baa\ abb\ bab$  — —  $aaa\ bbb$  — — —  $bb\check{b}$   
 5 Forbidden: — — — —  $aab\ bba$  — —  $aab\ b\check{b}\check{a}\ a\check{a}$  —

;	$a$	$\check{a}$	$b$	$\check{b}$
$a$	$a$	$1'a\check{a}b\check{b}$	$ab$	$a\check{b}$
$\check{a}$	$1'a\check{a}b\check{b}$	$\check{a}$	$\check{a}b$	$\check{a}\check{b}$
$b$	$ab$	$\check{a}b$	$b\check{b}$	$1'a\check{a}b\check{b}$
$\check{b}$	$a\check{b}$	$\check{a}\check{b}$	$1'a\check{a}b\check{b}$	$b\check{b}$

$ D_2  = 4$
$ D_3  = 7$
$ D_4  = 30$
$ 4 \times 4\text{'s in maximum proper } 5DB  = 28$

$$(a\check{a}b\check{b})46 \cong |\supseteq (a)2(a\check{a}b\check{b})$$

$$(ab)7(a\check{a}, b\check{b})(b\check{b}, a\check{a})$$

$$(a\check{b}\check{b})31(b\check{b}, a, \check{a})(b\check{b}, \check{a}, a)$$

$$(a\check{b}\check{b})33(a\check{a}, b, \check{b})(a\check{a}, \check{b}, b)$$

The automorphism group of  $(a\check{a}b\check{b})46$  is  $\{(), (a\check{a}), (b\check{b}), (a\check{a})(b\check{b})\}$ .

Forbidden minors of the maximum 5-dimensional basis:

$$\begin{array}{cccccc} a_{01} & a_{02} & b_{03} & b_{12} & b_{13} & \check{a}_{23} \\ a_{01} & a_{02} & \check{b}_{03} & b_{12} & \check{a}_{13} & \check{b}_{23} \end{array}$$

$(a\check{a}b\check{b})47$  13 Mandatory:  $aba\ baa\ abb\ bab$  — —  $aaa\ bbb$  — —  $aa\check{a}\ b\check{b}\check{b}$   
 4 Forbidden: — — — —  $aab\ bba$  — —  $aab\ b\check{b}\check{a}$  — —

;	$a$	$\check{a}$	$b$	$\check{b}$
$a$	$a\check{a}$	$1'a\check{a}b\check{b}$	$ab$	$a\check{b}$
$\check{a}$	$1'a\check{a}b\check{b}$	$a\check{a}$	$\check{a}b$	$\check{a}\check{b}$
$b$	$ab$	$\check{a}b$	$b\check{b}$	$1'a\check{a}b\check{b}$
$\check{b}$	$a\check{b}$	$\check{a}\check{b}$	$1'a\check{a}b\check{b}$	$b\check{b}$

$ D_2  = 4$
$ D_3  = 8$
$ D_4  = 36$
$ 4 \times 4\text{'s in maximum proper 5DB}  = 34$

$$(a\check{a}b\check{b})47 \cong |\supseteq (a)2(a\check{a}b\check{b})$$

$$(a\check{a})3(ab, \check{a}\check{b})(a\check{b}, \check{a}b)(\check{a}b, a\check{b})(\check{a}\check{b}, ab)$$

$$(ab)7(a\check{a}, b\check{b})(b\check{b}, a\check{a})$$

$$(abb)33(a\check{a}, b, \check{b})(a\check{a}, \check{b}, b)(b\check{b}, a, \check{a})(b\check{b}, \check{a}, a)$$

The automorphism group of  $(a\check{a}b\check{b})47$  is  $\{(), (a\check{a}), (b\check{b}), (a\check{a})(b\check{b}), (ab)(\check{a}\check{b}), (ab\check{a}\check{b}), (a\check{b}\check{a}b), (a\check{b})(\check{a}b)\}$ .  
 Forbidden minors of the maximum 5-dimensional basis:

$$\begin{matrix} a_{01} & a_{02} & b_{03} & b_{12} & b_{13} & \check{a}_{23} \\ a_{01} & a_{02} & b_{03} & b_{12} & \check{a}_{13} & b_{23} \end{matrix}$$

$\supseteq (abb)33$  via  $a + \check{a} \rightarrow a$ .

$(a\check{a}b\check{b})48$  12 Mandatory:  $aba\ baa\ abb\ bab$  — —  $aaa\ bbb$  —  $bb\check{a}$  — —  
 5 Forbidden: — — — —  $aab\ bba$  — —  $aab$  —  $aa\check{a}\ b\check{b}$

;	$a$	$\check{a}$	$b$	$\check{b}$
$a$	$a$	$1'a\check{a}b\check{b}$	$ab\check{b}$	$a\check{b}$
$\check{a}$	$1'a\check{a}b\check{b}$	$\check{a}$	$\check{a}b$	$\check{a}\check{b}\check{b}$
$b$	$ab\check{b}$	$\check{a}b$	$\check{a}b$	$1'a\check{a}b\check{b}$
$\check{b}$	$a\check{b}$	$\check{a}\check{b}\check{b}$	$1'a\check{a}b\check{b}$	$a\check{b}$

$ D_2  = 4$
$ D_3  = 7$
$ D_4  = 40$
$B_5$ is a basis
$B_6$ is a basis

$$(a\check{a}b\check{b})48 \cong |\supseteq (a)2(a\check{a}b\check{b})$$

$$(a\check{a})2(a\check{b}, \check{a}b)(\check{a}b, a\check{b})$$

$$(a\check{a})3(ab, \check{a}\check{b})(\check{a}\check{b}, ab)$$

$$(ab)7(a\check{a}, b\check{b})(b\check{b}, a\check{a})$$

$$(abb)31(b\check{b}, a, \check{a})(b\check{b}, \check{a}, a)$$

The automorphism group of  $(a\check{a}b\check{b})48$  is  $\{(), (a\check{a})(b\check{b})\}$ .

$(a\check{a}b\check{b})49$  13 Mandatory:  $aba\ baa\ abb\ bab$  — —  $aaa\ bbb$  —  $bb\check{a}$  —  $b\check{b}\check{b}$   
 4 Forbidden: — — — —  $aab\ bba$  — —  $aab$  —  $aa\check{a}$  —

;	$a$	$\check{a}$	$b$	$\check{b}$
$a$	$a$	$1'a\check{a}b\check{b}$	$ab\check{b}$	$a\check{b}$
$\check{a}$	$1'a\check{a}b\check{b}$	$\check{a}$	$\check{a}b$	$\check{a}b\check{b}$
$b$	$ab\check{b}$	$\check{a}b$	$\check{a}b\check{b}$	$1'a\check{a}b\check{b}$
$\check{b}$	$a\check{b}$	$\check{a}b\check{b}$	$1'a\check{a}b\check{b}$	$ab\check{b}$

$ D_2  = 4$
$ D_3  = 8$
$ D_4  = 50$
$B_5$ is a basis
$B_6$ is a basis

$$(a\check{a}b\check{b})49 \cong |\supseteq (a)2(a\check{a}b\check{b})$$

$$(a\check{a})3(ab, \check{a}b)(\check{a}b, ab)$$

$$(ab)7(a\check{a}, b\check{b})(b\check{b}, a\check{a})$$

$$(ab\check{b})31(b\check{b}, a, \check{a})(b\check{b}, \check{a}, a)$$

The automorphism group of  $(a\check{a}b\check{b})49$  is  $\{(), (a\check{a})(b\check{b})\}$ .

$(a\check{a}b\check{b})50$  13 Mandatory:  $aba\ baa\ abb\ bab$  — —  $aaa\ bbb\ aab\ bb\check{a}$  — —  
4 Forbidden: — — — —  $aab\ b\check{b}a$  — — — —  $aa\check{a}\ b\check{b}\check{b}$

;	$a$	$\check{a}$	$b$	$\check{b}$
$a$	$a\check{b}$	$1'a\check{a}b\check{b}$	$a\check{a}b\check{b}$	$a\check{b}$
$\check{a}$	$1'a\check{a}b\check{b}$	$\check{a}b$	$\check{a}b$	$a\check{a}b\check{b}$
$b$	$a\check{a}b\check{b}$	$\check{a}b$	$\check{a}b$	$1'a\check{a}b\check{b}$
$\check{b}$	$a\check{b}$	$a\check{a}b\check{b}$	$1'a\check{a}b\check{b}$	$a\check{b}$

$ D_2  = 4$
$ D_3  = 8$
$ D_4  = 64$
$B_5$ is a basis
$B_6$ is a basis

$$(a\check{a}b\check{b})50 \cong |\supseteq (a)2(a\check{a}b\check{b})$$

$$(a\check{a})3(ab, \check{a}b)(\check{a}b, ab)$$

$$(ab)7(a\check{a}, b\check{b})(b\check{b}, a\check{a})$$

$$(a\check{a})2(a\check{b}, \check{a}b)(\check{a}b, a\check{b})$$

The automorphism group of  $(a\check{a}b\check{b})50$  is  $\{(), (a\check{a})(b\check{b}), (ab)(\check{a}b), (a\check{b})(\check{a}b)\}$ .

$(a\check{a}b\check{b})51$  13 Mandatory:  $aba\ baa\ abb\ bab$  —  $bba$  — —  $aab$  —  $aa\check{a}\ b\check{b}\check{b}$   
4 Forbidden: — — — —  $aab$  —  $aaa\ bbb$  —  $bb\check{a}$  — —

;	$a$	$\check{a}$	$b$	$\check{b}$
$a$	$\check{a}b$	$1'b\check{b}$	$a\check{a}b$	$ab\check{b}$
$\check{a}$	$1'b\check{b}$	$ab$	$\check{a}b\check{b}$	$a\check{a}b$
$b$	$a\check{a}b$	$\check{a}b\check{b}$	$a\check{b}$	$1'a\check{a}$
$\check{b}$	$ab\check{b}$	$a\check{a}b$	$1'a\check{a}$	$\check{a}b$



$ D_2  = 4$
$ D_3  = 8$
$ D_4  = 29$
$ 4 \times 4\text{'s in maximum proper } \check{5}\text{DB}  = 21$

$$(a\check{a}b\check{b})51 \cong |\supseteq (a)2(a\check{a}b\check{b})$$

$$(a\check{a})3(ab, \check{a}\check{b})(a\check{b}, \check{a}b)(\check{a}b, a\check{b})(\check{a}\check{b}, ab)$$

$$(ab)7(a\check{a}, b\check{b})(b\check{b}, a\check{a})$$

The automorphism group of  $(a\check{a}b\check{b})51$  is  $\{(), (a\check{a})(b\check{b}), (ab\check{a}\check{b}), (a\check{b}\check{a}b)\}$ .

Forbidden minors of the maximum 5-dimensional basis:

$a_{01}$	$a_{02}$	$b_{03}$	$b_{12}$	$\check{a}_{13}$	$\check{a}_{23}$
$a_{01}$	$a_{02}$	$b_{03}$	$b_{12}$	$\check{b}_{13}$	$\check{a}_{23}$
$a_{01}$	$a_{02}$	$\check{b}_{03}$	$b_{12}$	$a_{13}$	$a_{23}$
$a_{01}$	$a_{02}$	$\check{b}_{03}$	$b_{12}$	$\check{a}_{13}$	$\check{b}_{23}$
$a_{01}$	$\check{a}_{02}$	$b_{03}$	$b_{12}$	$\check{b}_{13}$	$\check{a}_{23}$
$a_{01}$	$\check{a}_{02}$	$b_{03}$	$b_{12}$	$\check{b}_{13}$	$\check{a}_{23}$
$a_{01}$	$b_{02}$	$b_{03}$	$b_{12}$	$\check{b}_{13}$	$a_{23}$
$a_{01}$	$b_{02}$	$b_{03}$	$\check{b}_{12}$	$\check{b}_{13}$	$a_{23}$

$$(a\check{a}b\check{b})51 \quad \{2, 4, 10\} \quad \{5, 11, 13\} \quad \{8, 9, 12\} \quad \{3, 6, 7\} \quad Z_{13}$$

$(a\check{a}b\check{b})52$  14 Mandatory:  $aba \ baa \ abb \ bab \ \text{---} \ bba \ \text{---} \ \text{---} \ aab \ bb\check{a} \ aa\check{a} \ b\check{b}\check{b}$   
 3 Forbidden:  $\text{---} \ \text{---} \ \text{---} \ \text{---} \ aab \ \text{---} \ aaa \ bbb \ \text{---} \ \text{---} \ \text{---} \ \text{---}$

;	$a$	$\check{a}$	$b$	$\check{b}$
$a$	$\check{a}\check{b}$	$1'b\check{b}$	$a\check{a}b\check{b}$	$a\check{b}\check{b}$
$\check{a}$	$1'b\check{b}$	$ab$	$\check{a}b\check{b}$	$a\check{a}b\check{b}$
$b$	$a\check{a}b\check{b}$	$\check{a}b\check{b}$	$a\check{a}\check{b}$	$1'a\check{a}$
$\check{b}$	$a\check{b}\check{b}$	$a\check{a}b\check{b}$	$1'a\check{a}$	$a\check{a}b$

$J :$	$a_{01}$	$a_{02}$	$b_{21}$	$\check{b}_{03}$	$b_{31}$	$\check{b}_{24}$	$\check{b}_{43}$
$L :$	$b_{01}$	$a_{02}$	$\check{a}_{21}$	$\check{a}_{03}$	$\check{a}_{31}$	$\check{a}_{04}$	$\check{b}_{41}$
$M :$	$a_{01}$	$a_{02}$	$\check{b}_{21}$	$b_{03}$	$b_{32}$	$b_{24}$	$a_{41}$

$ D_2  = 4$
$ D_3  = 9$
$ D_4  = 47$
No $\check{5}\text{DB}$

$$(a\check{a}b\check{b})52 \cong |\supseteq (a)2(a\check{a}b\check{b})$$

$$(a\check{a})3(ab, \check{a}\check{b})(a\check{b}, \check{a}b)(\check{a}b, a\check{b})(\check{a}\check{b}, ab)$$

$$(ab)7(a\check{a}, b\check{b})(b\check{b}, a\check{a})$$

$$(a\check{b}\check{b})9(a\check{a}, b, \check{b})(a\check{a}, \check{b}, b)$$

The automorphism group of  $(a\check{a}b\check{b})52$  is  $\{(), (a\check{a})(b\check{b})\}$ .

$(a\check{a}b\check{b})53$  14 Mandatory:  $aba \ baa \ abb \ bab \ \text{---} \ bba \ \text{---} \ bbb \ aab \ \text{---} \ aa\check{a} \ b\check{b}\check{b}$   
 3 Forbidden:  $\text{---} \ \text{---} \ \text{---} \ \text{---} \ aab \ \text{---} \ aaa \ \text{---} \ \text{---} \ bb\check{a} \ \text{---} \ \text{---}$

;	$a$	$\check{a}$	$b$	$\check{b}$
$a$	$\check{a}\check{b}$	$1'b\check{b}$	$a\check{a}b$	$ab\check{b}$
$\check{a}$	$1'b\check{b}$	$ab$	$\check{a}b\check{b}$	$a\check{a}\check{b}$
$b$	$a\check{a}b$	$\check{a}b\check{b}$	$ab\check{b}$	$1'a\check{a}b\check{b}$
$\check{b}$	$ab\check{b}$	$a\check{a}\check{b}$	$1'a\check{a}b\check{b}$	$\check{a}b\check{b}$

$ D_2  = 4$
$ D_3  = 9$
$ D_4  = 55$
No 5DB

$$(a\check{a}b\check{b})53 \cong |\supseteq (a)2(a\check{a}b\check{b})$$

$$(a\check{a})3(ab, \check{a}\check{b})(a\check{b}, \check{a}b)(\check{a}b, a\check{b})(\check{a}\check{b}, ab)$$

$$(ab)7(a\check{a}, b\check{b})(b\check{b}, a\check{a})$$

The automorphism group of  $(a\check{a}b\check{b})53$  is  $\{(), (a\check{a})(b\check{b})\}$ .

$(a\check{a}b\check{b})54$  14 Mandatory:  $aba\ baa\ abb\ bab \text{ --- } bba \text{ --- } bbb\ aab\ bb\check{a} \text{ --- } bb\check{b}$   
 3 Forbidden:  $\text{--- --- --- } aab \text{ --- } aaa \text{ --- --- } a\check{a}\check{a} \text{ ---}$

;	$a$	$\check{a}$	$b$	$\check{b}$
$a$	$\check{b}$	$1'b\check{b}$	$a\check{a}b\check{b}$	$ab\check{b}$
$\check{a}$	$1'b\check{b}$	$b$	$\check{a}b\check{b}$	$a\check{a}b\check{b}$
$b$	$a\check{a}b\check{b}$	$\check{a}b\check{b}$	$a\check{a}b\check{b}$	$1'a\check{a}b\check{b}$
$\check{b}$	$ab\check{b}$	$a\check{a}b\check{b}$	$1'a\check{a}b\check{b}$	$a\check{a}b\check{b}$

$ D_2  = 4$
$ D_3  = 9$
$ D_4  = 79$
$B_5$ is a basis
$B_6$ is a basis

$$(a\check{a}b\check{b})54 \cong |\supseteq (a)2(a\check{a}b\check{b})$$

$$(a\check{a})3(ab, \check{a}\check{b})(a\check{b}, \check{a}b)(\check{a}b, a\check{b})(\check{a}\check{b}, ab)$$

$$(ab)6(b\check{b}, a\check{a})$$

$$(ab\check{b})36(a\check{a}, b, \check{b})(a\check{a}, \check{b}, b)$$

The automorphism group of  $(a\check{a}b\check{b})54$  is  $\{(), (a\check{a})(b\check{b})\}$ .

$(a\check{a}b\check{b})55$  14 Mandatory:  $aba\ baa\ abb\ bab \text{ --- } bba \text{ --- } bbb\ aab\ bb\check{a}\ a\check{a}\check{a} \text{ ---}$   
 3 Forbidden:  $\text{--- --- --- } aab \text{ --- } aaa \text{ --- --- } bb\check{b}$

;	$a$	$\check{a}$	$b$	$\check{b}$
$a$	$\check{a}\check{b}$	$1'b\check{b}$	$a\check{a}b\check{b}$	$ab\check{b}$
$\check{a}$	$1'b\check{b}$	$ab$	$\check{a}b\check{b}$	$a\check{a}b\check{b}$
$b$	$a\check{a}b\check{b}$	$\check{a}b\check{b}$	$a\check{a}b$	$1'a\check{a}b\check{b}$
$\check{b}$	$ab\check{b}$	$a\check{a}b\check{b}$	$1'a\check{a}b\check{b}$	$a\check{a}\check{b}$

$B_5$ is a basis
$J$ : true.
$L$ : true.
$M$ : true.

$ D_2  = 4$
$ D_3  = 9$
$ D_4  = 70$
$B_5$ is a basis

$$(a\check{a}b\check{b})55 \cong |\supseteq (a)2(a\check{a}b\check{b})$$

$$(a\check{a})3(ab, \check{a}\check{b})(a\check{b}, \check{a}b)(\check{a}b, a\check{b})(\check{a}\check{b}, ab)$$

$$(ab)7(a\check{a}, b\check{b})(b\check{b}, a\check{a})$$

$$(ab\check{b})35(a\check{a}, b, \check{b})(a\check{a}, \check{b}, b)$$

The automorphism group of  $(a\check{a}b\check{b})55$  is  $\{(), (a\check{a})(b\check{b})\}$ .

A program written in Pascal showed on 11-19-1992 that  $(a\check{a}b\check{b})55$  has no 6-dimensional basis. Filename: **newdata**. Therefore  $(a\check{a}b\check{b})55 \in RA_5 \sim RA_6$ .

$(a\check{a}b\check{b})56$  15 Mandatory:  $aba\ baa\ abb\ bab \text{ --- } bba \text{ --- } bbb\ aab\ bb\check{a}\ a\check{a}\check{a}\ b\check{b}\check{b}$   
 2 Forbidden:  $\text{--- --- --- --- } aab \text{ --- } aaa \text{ --- --- --- ---}$

;	$a$	$\check{a}$	$b$	$\check{b}$
$a$	$\check{a}\check{b}$	$1'b\check{b}$	$a\check{a}b\check{b}$	$ab\check{b}$
$\check{a}$	$1'b\check{b}$	$ab$	$\check{a}b\check{b}$	$a\check{a}b\check{b}$
$b$	$a\check{a}b\check{b}$	$\check{a}b\check{b}$	$a\check{a}b\check{b}$	$1'a\check{a}b\check{b}$
$\check{b}$	$ab\check{b}$	$a\check{a}b\check{b}$	$1'a\check{a}b\check{b}$	$a\check{a}b\check{b}$

$ D_2  = 4$
$ D_3  = 10$
$ D_4  = 88$
$B_5$ is a basis
$B_6$ is a basis

$$(a\check{a}b\check{b})56 \cong |\supseteq (a)2(a\check{a}b\check{b})$$

$$(a\check{a})3(ab, \check{a}\check{b})(a\check{b}, \check{a}b)(\check{a}b, a\check{b})(\check{a}\check{b}, ab)$$

$$(ab)7(a\check{a}, b\check{b})(b\check{b}, a\check{a})$$

$$(ab\check{b})37(a\check{a}, b, \check{b})(a\check{a}, \check{b}, b)$$

The automorphism group of  $(a\check{a}b\check{b})56$  is  $\{(), (a\check{a})(b\check{b})\}$ .

$(a\check{a}b\check{b})57$  12 Mandatory:  $aba\ baa\ abb\ bab \text{ --- } bba\ aaa \text{ --- --- } bb\check{a} \text{ --- ---}$   
 5 Forbidden:  $\text{--- --- --- --- } aab \text{ --- --- } bbb\ aab \text{ --- } a\check{a}\check{a}\ b\check{b}\check{b}$

;	$a$	$\check{a}$	$b$	$\check{b}$
$a$	$a$	$1'a\check{a}b\check{b}$	$ab\check{b}$	$ab\check{b}$
$\check{a}$	$1'a\check{a}b\check{b}$	$\check{a}$	$\check{a}b\check{b}$	$\check{a}b\check{b}$
$b$	$ab\check{b}$	$\check{a}b\check{b}$	$a\check{a}$	$1'a\check{a}$
$\check{b}$	$ab\check{b}$	$\check{a}b\check{b}$	$1'a\check{a}$	$a\check{a}$

$J$	$b_{01}$	$a_{02}$	$\check{a}_{21}$	$\check{a}_{03}$	$a_{31}$	$b_{24}$	$b_{43}$
$L$	true.						
$M$	$b_{01}$	$a_{02}$	$\check{a}_{21}$	$b_{03}$	$b_{32}$	$b_{24}$	$b_{41}$

$ D_2  = 4$
$ D_3  = 7$
$ D_4  = 37$
No 5DB

$$(a\check{a}b\check{b})57 \cong |\supseteq (a)2(a\check{a}b\check{b})$$

$$(a\check{a})3(ab, \check{a}\check{b})(a\check{b}, \check{a}b)(\check{a}b, a\check{b})(\check{a}\check{b}, ab)$$

$$(ab)6(a\check{a}, b\check{b})$$

$$(a\check{b}\check{b})7(a\check{a}, b, \check{b})(a\check{a}, \check{b}, b)$$

$$(a\check{b}\check{b})30(b\check{b}, a, \check{a})(b\check{b}, \check{a}, a)$$

The automorphism group of  $(a\check{a}b\check{b})57$  is  $\{(), (a\check{a}), (b\check{b}), (a\check{a})(b\check{b})\}$ .

$(a\check{a}b\check{b})58$  13 Mandatory:  $aba\ baa\ abb\ bab$  —  $bba\ aaa$  — —  $bb\check{a}$  —  $bb\check{b}$   
 4 Forbidden: — — — —  $aab$  — —  $bbb\ aab$  — —  $aa\check{a}$  —

;	$a$	$\check{a}$	$b$	$\check{b}$
$a$	$a$	$1'a\check{a}b\check{b}$	$ab\check{b}$	$ab\check{b}$
$\check{a}$	$1'a\check{a}b\check{b}$	$\check{a}$	$\check{a}b\check{b}$	$\check{a}b\check{b}$
$b$	$ab\check{b}$	$\check{a}b\check{b}$	$a\check{a}\check{b}$	$1'a\check{a}$
$\check{b}$	$ab\check{b}$	$\check{a}b\check{b}$	$1'a\check{a}$	$a\check{a}b$

$J$	true.						
$L$	true.						
$M$	$b_{01}$	$a_{02}$	$\check{a}_{21}$	$b_{03}$	$b_{32}$	$\check{b}_{24}$	$b_{41}$

$ D_2  = 4$
$ D_3  = 8$
$ D_4  = 44$
No 5DB

$$(a\check{a}b\check{b})58 \cong |\supseteq (a)2(a\check{a}b\check{b})$$

$$(a\check{a})3(ab, \check{a}\check{b})(a\check{b}, \check{a}b)(\check{a}b, a\check{b})(\check{a}\check{b}, ab)$$

$$(ab)7(a\check{a}, b\check{b})(b\check{b}, a\check{a})$$

$$(a\check{b}\check{b})9(a\check{a}, b, \check{b})(a\check{a}, \check{b}, b)$$

$$(a\check{b}\check{b})31(b\check{b}, a, \check{a})(b\check{b}, \check{a}, a)$$

The automorphism group of  $(a\check{a}b\check{b})58$  is  $\{(), (a\check{a}), (b\check{b}), (a\check{a})(b\check{b})\}$ .

$(a\check{a}b\check{b})59$  13 Mandatory:  $aba\ baa\ abb\ bab$  —  $bba\ aaa$  — —  $bb\check{a}\ aa\check{a}$  —  
 4 Forbidden: — — — —  $aab$  — —  $bbb\ aab$  — —  $bb\check{b}$

;	$a$	$\check{a}$	$b$	$\check{b}$
$a$	$a\check{a}$	$1'a\check{a}\check{b}\check{b}$	$ab\check{b}$	$ab\check{b}$
$\check{a}$	$1'a\check{a}\check{b}\check{b}$	$a\check{a}$	$\check{a}\check{b}\check{b}$	$\check{a}\check{b}\check{b}$
$b$	$ab\check{b}$	$\check{a}\check{b}\check{b}$	$a\check{a}$	$1'a\check{a}$
$\check{b}$	$ab\check{b}$	$\check{a}\check{b}\check{b}$	$1'a\check{a}$	$a\check{a}$

$J$ :	$a_{01}$	$a_{02}$	$b_{21}$	$\check{a}_{03}$	$\check{a}_{31}$	$b_{24}$	$b_{43}$
$L$ :	$a_{01}$	$a_{02}$	$b_{21}$	$\check{a}_{03}$	$\check{a}_{31}$	$b_{04}$	$b_{41}$
$M$ :	$a_{01}$	$\check{a}_{02}$	$\check{a}_{21}$	$\check{a}_{03}$	$b_{32}$	$b_{24}$	$b_{41}$

$ D_2  = 4$
$ D_3  = 8$
$ D_4  = 45$
No 5DB

$$(a\check{a}\check{b}\check{b})59 \cong |\supseteq (a)2(a\check{a}\check{b}\check{b})$$

$$(a\check{a})3(ab, \check{a}\check{b})(a\check{b}, \check{a}b)(\check{a}b, a\check{b})(\check{a}\check{b}, ab)$$

$$(ab)6(a\check{a}, b\check{b})$$

$$(ab\check{b})7(a\check{a}, b, \check{b})(a\check{a}, \check{b}, b)$$

$$(ab\check{b})32(b\check{b}, a, \check{a})(b\check{b}, \check{a}, a)$$

The automorphism group of  $(a\check{a}\check{b}\check{b})59$  is  $\{(), (a\check{a}), (b\check{b}), (a\check{a})(b\check{b})\}$ .

$(a\check{a}\check{b}\check{b})60$  14 Mandatory:  $aba\ baa\ abb\ bab$  —  $bba\ aaa$  — —  $bb\check{a}\ a\check{a}\check{b}\check{b}$   
 3 Forbidden: — — — —  $aab$  — —  $bbb\ a\check{a}\check{b}$  — — —

;	$a$	$\check{a}$	$b$	$\check{b}$
$a$	$a\check{a}$	$1'a\check{a}\check{b}\check{b}$	$ab\check{b}$	$ab\check{b}$
$\check{a}$	$1'a\check{a}\check{b}\check{b}$	$a\check{a}$	$\check{a}\check{b}\check{b}$	$\check{a}\check{b}\check{b}$
$b$	$ab\check{b}$	$\check{a}\check{b}\check{b}$	$a\check{a}\check{b}$	$1'a\check{a}$
$\check{b}$	$ab\check{b}$	$\check{a}\check{b}\check{b}$	$1'a\check{a}$	$a\check{a}\check{b}$

$J$ :	$a_{01}$	$a_{02}$	$b_{21}$	$\check{a}_{03}$	$\check{a}_{31}$	$b_{24}$	$b_{43}$
$L$ :	$a_{01}$	$a_{02}$	$b_{21}$	$\check{a}_{03}$	$\check{a}_{31}$	$b_{04}$	$b_{41}$
$M$ :	$a_{01}$	$\check{a}_{02}$	$\check{a}_{21}$	$\check{a}_{03}$	$b_{32}$	$\check{b}_{24}$	$b_{41}$

$ D_2  = 4$
$ D_3  = 9$
$ D_4  = 52$
No 5DB

$$(a\check{a}\check{b}\check{b})60 \cong |\supseteq (a)2(a\check{a}\check{b}\check{b})$$

$$(a\check{a})3(ab, \check{a}\check{b})(a\check{b}, \check{a}b)(\check{a}b, a\check{b})(\check{a}\check{b}, ab)$$

$$(ab)7(a\check{a}, b\check{b})(b\check{b}, a\check{a})$$

$$(ab\check{b})9(a\check{a}, b, \check{b})(a\check{a}, \check{b}, b)$$

$$(ab\check{b})33(b\check{b}, a, \check{a})(b\check{b}, \check{a}, a)$$

The automorphism group of  $(a\check{a}\check{b}\check{b})60$  is  $\{(), (a\check{a}), (b\check{b}), (a\check{a})(b\check{b})\}$ .

$(a\check{a}b\check{b})61$  13 Mandatory:  $aba\ baa\ abb\ bab$  —  $bba\ aaa$  —  $a\check{a}b\ b\check{b}\check{a}$  — —  
 4 Forbidden: — — — —  $a\check{a}b$  — —  $b\check{b}b$  — —  $a\check{a}\check{a}\ b\check{b}\check{b}$

;	$a$	$\check{a}$	$b$	$\check{b}$
$a$	$a\check{b}$	$1'a\check{a}b\check{b}$	$a\check{a}b\check{b}$	$ab\check{b}$
$\check{a}$	$1'a\check{a}b\check{b}$	$\check{a}b$	$\check{a}b\check{b}$	$a\check{a}b\check{b}$
$b$	$a\check{a}b\check{b}$	$\check{a}b\check{b}$	$a\check{a}$	$1'a\check{a}$
$\check{b}$	$ab\check{b}$	$a\check{a}b\check{b}$	$1'a\check{a}$	$a\check{a}$

$J$ :	true.
$L$ :	true.
$M$ :	$a_{01}$ $\check{a}_{02}$ $\check{b}_{21}$ $b_{03}$ $b_{32}$ $\check{a}_{24}$ $b_{41}$

$ D_2  = 4$
$ D_3  = 8$
$ D_4  = 58$
No 5DB

$$(a\check{a}b\check{b})61 \cong |\supseteq (a)2(a\check{a}b\check{b})$$

$$(a\check{a})3(ab, \check{a}\check{b})(a\check{b}, \check{a}b)(\check{a}b, a\check{b})(\check{a}\check{b}, ab)$$

$$(ab)6(a\check{a}, b\check{b})$$

$$(ab\check{b})7(a\check{a}, b, \check{b})(a\check{a}, \check{b}, b)$$

The automorphism group of  $(a\check{a}b\check{b})61$  is  $\{(), (a\check{a})(b\check{b})\}$ .

$(a\check{a}b\check{b})62$  14 Mandatory:  $aba\ baa\ abb\ bab$  —  $bba\ aaa$  —  $a\check{a}b\ b\check{b}\check{a}$  —  $b\check{b}\check{b}$   
 3 Forbidden: — — — —  $a\check{a}b$  — —  $b\check{b}b$  — —  $a\check{a}\check{a}$  —

;	$a$	$\check{a}$	$b$	$\check{b}$
$a$	$a\check{b}$	$1'a\check{a}b\check{b}$	$a\check{a}b\check{b}$	$ab\check{b}$
$\check{a}$	$1'a\check{a}b\check{b}$	$\check{a}b$	$\check{a}b\check{b}$	$a\check{a}b\check{b}$
$b$	$a\check{a}b\check{b}$	$\check{a}b\check{b}$	$a\check{a}\check{b}$	$1'a\check{a}$
$\check{b}$	$ab\check{b}$	$a\check{a}b\check{b}$	$1'a\check{a}$	$a\check{a}b$

$J$ :	true.
$L$ :	true.
$M$ :	$a_{01}$ $\check{a}_{02}$ $\check{b}_{21}$ $b_{03}$ $b_{32}$ $\check{a}_{24}$ $b_{41}$

$ D_2  = 4$
$ D_3  = 9$
$ D_4  = 67$
No 5DB

$$(a\check{a}b\check{b})62 \cong |\supseteq (a)2(a\check{a}b\check{b})$$

$$(a\check{a})3(ab, \check{a}\check{b})(a\check{b}, \check{a}b)(\check{a}b, a\check{b})(\check{a}\check{b}, ab)$$

$$(ab)7(a\check{a}, b\check{b})(b\check{b}, a\check{a})$$

$$(ab\check{b})9(a\check{a}, b, \check{b})(a\check{a}, \check{b}, b)$$

The automorphism group of  $(a\check{a}b\check{b})62$  is  $\{(), (a\check{a})(b\check{b})\}$ .

$(a\check{a}b\check{b})63$  14 Mandatory:  $aba\ baa\ abb\ bab$  —  $bba\ aaa$  —  $a\check{a}b\ bb\check{a}\ aa\check{a}$  —  
 3 Forbidden: — — — —  $a\check{a}b$  — —  $b\check{b}b$  — — — —  $b\check{b}\check{b}$

;	$a$	$\check{a}$	$b$	$\check{b}$
$a$	$a\check{a}b$	$1'a\check{a}b\check{b}$	$a\check{a}b\check{b}$	$ab\check{b}$
$\check{a}$	$1'a\check{a}b\check{b}$	$a\check{a}b$	$\check{a}b\check{b}$	$a\check{a}b\check{b}$
$b$	$a\check{a}b\check{b}$	$\check{a}b\check{b}$	$a\check{a}$	$1'a\check{a}$
$\check{b}$	$ab\check{b}$	$a\check{a}b\check{b}$	$1'a\check{a}$	$a\check{a}$

$J$ :	true.
$L$ :	true.
$M$ :	$b_{01}$ $a_{02}$ $\check{a}_{21}$ $b_{03}$ $b_{32}$ $\check{b}_{24}$ $\check{b}_{41}$

$ D_2  = 4$
$ D_3  = 9$
$ D_4  = 72$
No 5DB

$$(a\check{a}b\check{b})63 \cong |\supseteq (a)2(a\check{a}b\check{b})$$

$$(a\check{a})3(ab, \check{a}b)(a\check{b}, \check{a}b)(\check{a}b, a\check{b})(\check{a}\check{b}, ab)$$

$$(ab)6(a\check{a}, b\check{b})$$

$$(ab\check{b})7(a\check{a}, b, \check{b})(a\check{a}, \check{b}, b)$$

The automorphism group of  $(a\check{a}b\check{b})63$  is  $\{(), (a\check{a})(b\check{b})\}$ .

$(a\check{a}b\check{b})64$  15 Mandatory:  $aba\ baa\ abb\ bab$  —  $bba\ aaa$  —  $a\check{a}b\ bb\check{a}\ aa\check{a}\ b\check{b}\check{b}$   
 2 Forbidden: — — — —  $a\check{a}b$  — —  $b\check{b}b$  — — — —

;	$a$	$\check{a}$	$b$	$\check{b}$
$a$	$a\check{a}b$	$1'a\check{a}b\check{b}$	$a\check{a}b\check{b}$	$ab\check{b}$
$\check{a}$	$1'a\check{a}b\check{b}$	$a\check{a}b$	$\check{a}b\check{b}$	$a\check{a}b\check{b}$
$b$	$a\check{a}b\check{b}$	$\check{a}b\check{b}$	$a\check{a}b$	$1'a\check{a}$
$\check{b}$	$ab\check{b}$	$a\check{a}b\check{b}$	$1'a\check{a}$	$a\check{a}b$

$ D_2  = 4$
$ D_3  = 10$
$ D_4  = 81$
No 5DB

$$(a\check{a}b\check{b})64 \cong |\supseteq (a)2(a\check{a}b\check{b})$$

$$(a\check{a})3(ab, \check{a}b)(a\check{b}, \check{a}b)(\check{a}b, a\check{b})(\check{a}\check{b}, ab)$$

$$(ab)7(a\check{a}, b\check{b})(b\check{b}, a\check{a})$$

$$(ab\check{b})9(a\check{a}, b, \check{b})(a\check{a}, \check{b}, b)$$

The automorphism group of  $(a\check{a}b\check{b})64$  is  $\{(), (a\check{a})(b\check{b})\}$ .

$(a\check{a}b\check{b})65$  13 Mandatory:  $aba\ baa\ abb\ bab$  —  $bba\ aaa\ b\check{b}b$  —  $b\check{b}\check{a}$  — —  
 4 Forbidden: — — — —  $a\check{a}b$  — — — —  $a\check{a}b$  —  $aa\check{a}\ b\check{b}\check{b}$

;	$a$	$\check{a}$	$b$	$\check{b}$
$a$	$a$	$1' a\check{a}b\check{b}$	$ab\check{b}$	$ab\check{b}$
$\check{a}$	$1' a\check{a}b\check{b}$	$\check{a}$	$\check{a}b\check{b}$	$\check{a}b\check{b}$
$b$	$ab\check{b}$	$\check{a}b\check{b}$	$a\check{a}b$	$1' a\check{a}b\check{b}$
$\check{b}$	$ab\check{b}$	$\check{a}b\check{b}$	$1' a\check{a}b\check{b}$	$a\check{a}\check{b}$

$ D_2  = 4$
$ D_3  = 8$
$ D_4  = 61$
$B_5$ is a basis
$B_6$ is a basis

$$(a\check{a}b\check{b})65 \cong |\supseteq (a)2(a\check{a}b\check{b})$$

$$(a\check{a})3(ab, \check{a}\check{b})(a\check{b}, \check{a}b)(\check{a}b, a\check{b})(\check{a}\check{b}, ab)$$

$$(ab)7(a\check{a}, b\check{b})(b\check{b}, a\check{a})$$

$$(ab\check{b})31(b\check{b}, a, \check{a})(b\check{b}, \check{a}, a)$$

$$(ab\check{b})35(a\check{a}, b, \check{b})(a\check{a}, \check{b}, b)$$

The automorphism group of  $(a\check{a}b\check{b})65$  is  $\{(), (a\check{a}), (b\check{b}), (a\check{a})(b\check{b})\}$ .

$(a\check{a}b\check{b})66$  14 Mandatory:  $aba baa abb bab \text{ --- } bba aaa bbb \text{ --- } bb\check{a} \text{ --- } bb\check{b}$   
 3 Forbidden:  $\text{--- --- --- } aab \text{ --- --- } aab \text{ --- } aa\check{a} \text{ ---}$

;	$a$	$\check{a}$	$b$	$\check{b}$
$a$	$a$	$1' a\check{a}b\check{b}$	$ab\check{b}$	$ab\check{b}$
$\check{a}$	$1' a\check{a}b\check{b}$	$\check{a}$	$\check{a}b\check{b}$	$\check{a}b\check{b}$
$b$	$ab\check{b}$	$\check{a}b\check{b}$	$a\check{a}b\check{b}$	$1' a\check{a}b\check{b}$
$\check{b}$	$ab\check{b}$	$\check{a}b\check{b}$	$1' a\check{a}b\check{b}$	$a\check{a}b\check{b}$

$ D_2  = 4$
$ D_3  = 9$
$ D_4  = 77$
$B_5$ is a basis
$B_6$ is a basis

$$(a\check{a}b\check{b})66 \cong |\supseteq (a)2(a\check{a}b\check{b})$$

$$(a\check{a})3(ab, \check{a}\check{b})(a\check{b}, \check{a}b)(\check{a}b, a\check{b})(\check{a}\check{b}, ab)$$

$$(ab)7(a\check{a}, b\check{b})(b\check{b}, a\check{a})$$

$$(ab\check{b})31(b\check{b}, a, \check{a})(b\check{b}, \check{a}, a)$$

$$(ab\check{b})37(a\check{a}, b, \check{b})(a\check{a}, \check{b}, b)$$

The automorphism group of  $(a\check{a}b\check{b})66$  is  $\{(), (a\check{a}), (b\check{b}), (a\check{a})(b\check{b})\}$ .

$(a\check{a}b\check{b})67$  14 Mandatory:  $aba baa abb bab \text{ --- } bba aaa bbb \text{ --- } bb\check{a} aa\check{a} \text{ ---}$   
 3 Forbidden:  $\text{--- --- --- } aab \text{ --- --- } aab \text{ --- --- } bb\check{b}$



;	<i>a</i>	<i>ǎ</i>	<i>b</i>	<i>ǔ</i>
<i>a</i>	<i>aǎ</i>	1' <i>aǎbǔ</i>	<i>abǔ</i>	<i>abǔ</i>
<i>ǎ</i>	1' <i>aǎbǔ</i>	<i>aǎ</i>	<i>ǎbǔ</i>	<i>ǎbǔ</i>
<i>b</i>	<i>abǔ</i>	<i>ǎbǔ</i>	<i>aǎb</i>	1' <i>aǎbǔ</i>
<i>ǔ</i>	<i>abǔ</i>	<i>ǎbǔ</i>	1' <i>aǎbǔ</i>	<i>aǎǔ</i>

$ D_2  = 4$
$ D_3  = 9$
$ D_4  = 69$
$ 4 \times 4\text{'s in maximum proper } 5\text{DB}  = 61$

$$(a\check{a}b\check{b})67 \cong | \supseteq (a)2(a\check{a}b\check{b})$$

$$(a\check{a})3(ab, \check{a}b)(a\check{b}, \check{a}b)(\check{a}b, a\check{b})(\check{a}\check{b}, ab)$$

$$(ab)7(a\check{a}, b\check{b})(b\check{b}, a\check{a})$$

$$(ab\check{b})33(b\check{b}, a, \check{a})(b\check{b}, \check{a}, a)$$

$$(ab\check{b})35(a\check{a}, b, \check{b})(a\check{a}, \check{b}, b)$$

The automorphism group of  $(a\check{a}b\check{b})67$  is  $\{(), (a\check{a}), (b\check{b}), (a\check{a})(b\check{b})\}$ .

Forbidden minors of the maximum 5-dimensional basis:

$a_{01}$	$a_{02}$	$b_{03}$	$b_{12}$	$\check{a}_{13}$	$\check{b}_{23}$
$a_{01}$	$a_{02}$	$b_{03}$	$b_{12}$	$\check{a}_{13}$	$\check{b}_{23}$
$a_{01}$	$a_{02}$	$b_{03}$	$b_{12}$	$\check{b}_{13}$	$\check{a}_{23}$
$a_{01}$	$a_{02}$	$\check{b}_{03}$	$b_{12}$	$\check{b}_{13}$	$\check{a}_{23}$
$a_{01}$	$a_{02}$	$\check{b}_{03}$	$b_{12}$	$\check{a}_{13}$	$\check{b}_{23}$
$a_{01}$	$a_{02}$	$\check{b}_{03}$	$b_{12}$	$\check{a}_{13}$	$\check{b}_{23}$
$a_{01}$	$a_{02}$	$\check{b}_{03}$	$b_{12}$	$\check{b}_{13}$	$\check{a}_{23}$
$a_{01}$	$a_{02}$	$\check{b}_{03}$	$b_{12}$	$\check{b}_{13}$	$\check{a}_{23}$

$$\supseteq (ab\check{b})33.$$

$(a\check{a}b\check{b})68$  15 Mandatory: *aba baa abb bab* — *bba aaa bbb* — *bbǎ aaǎ bbǔ*

2 Forbidden: — — — — *aab* — — — — *aab* — — —

;	<i>a</i>	<i>ǎ</i>	<i>b</i>	<i>ǔ</i>
<i>a</i>	<i>aǎ</i>	1' <i>aǎbǔ</i>	<i>abǔ</i>	<i>abǔ</i>
<i>ǎ</i>	1' <i>aǎbǔ</i>	<i>aǎ</i>	<i>ǎbǔ</i>	<i>ǎbǔ</i>
<i>b</i>	<i>abǔ</i>	<i>ǎbǔ</i>	<i>aǎbǔ</i>	1' <i>aǎbǔ</i>
<i>ǔ</i>	<i>abǔ</i>	<i>ǎbǔ</i>	1' <i>aǎbǔ</i>	<i>aǎǔ</i>

$ D_2  = 4$
$ D_3  = 10$
$ D_4  = 85$
$ 4 \times 4\text{'s in maximum proper } 5\text{DB}  = 77$

$$(a\check{a}b\check{b})68 \cong | \supseteq (a)2(a\check{a}b\check{b})$$

$$(a\check{a})3(ab, \check{a}b)(a\check{b}, \check{a}b)(\check{a}b, a\check{b})(\check{a}\check{b}, ab)$$

$$(ab)7(a\check{a}, b\check{b})(b\check{b}, a\check{a})$$

$$(ab\check{b})33(b\check{b}, a, \check{a})(b\check{b}, \check{a}, a)$$

$$(ab\check{b})37(a\check{a}, b, \check{b})(a\check{a}, \check{b}, b)$$

The automorphism group of  $(a\check{a}b\check{b})68$  is  $\{(), (a\check{a}), (b\check{b}), (a\check{a})(b\check{b})\}$ .  
 Forbidden minors of the maximum 5-dimensional basis:

$$\begin{array}{cccccc} a_{01} & a_{02} & b_{03} & b_{12} & \check{a}_{13} & \check{b}_{23} \\ a_{01} & a_{02} & b_{03} & b_{12} & \check{a}_{13} & \check{b}_{23} \\ a_{01} & a_{02} & b_{03} & b_{12} & \check{b}_{13} & \check{a}_{23} \\ a_{01} & a_{02} & b_{03} & b_{12} & \check{b}_{13} & \check{a}_{23} \\ a_{01} & a_{02} & \check{b}_{03} & b_{12} & \check{a}_{13} & \check{b}_{23} \\ a_{01} & a_{02} & \check{b}_{03} & b_{12} & \check{a}_{13} & \check{b}_{23} \\ a_{01} & a_{02} & \check{b}_{03} & b_{12} & \check{b}_{13} & \check{a}_{23} \\ a_{01} & a_{02} & \check{b}_{03} & b_{12} & \check{b}_{13} & \check{a}_{23} \end{array}$$

$\supseteq (a\check{b}\check{b})33$  via  $b + \check{b} \rightarrow a, a \rightarrow b, \check{a} \rightarrow \check{b}$ .

$(a\check{a}b\check{b})69$  13 Mandatory:  $aba\ baa\ abb\ bab \text{ --- } bba\ aaa\ bbb\ aab \text{ --- ---}$   
 4 Forbidden:  $\text{--- --- --- --- } aab \text{ --- --- --- } bb\check{a}\ aa\check{a}\ bb\check{b}$

;	$a$	$\check{a}$	$b$	$\check{b}$
$a$	$a\check{b}$	$1'a\check{a}b\check{b}$	$a\check{a}b$	$a\check{b}\check{b}$
$\check{a}$	$1'a\check{a}b\check{b}$	$\check{a}b$	$\check{a}b\check{b}$	$a\check{a}\check{b}$
$b$	$a\check{a}b$	$\check{a}b\check{b}$	$ab$	$1'a\check{a}b\check{b}$
$\check{b}$	$a\check{b}\check{b}$	$a\check{a}\check{b}$	$1'a\check{a}b\check{b}$	$\check{a}\check{b}$

$ D_2  = 4$
$ D_3  = 8$
$ D_4  = 57$
$ 4 \times 4\text{'s in maximum proper 5DB}  = 43$

$(a\check{a}b\check{b})69 \cong \supseteq (a)2(a\check{a}b\check{b})$

$(a\check{a})3(ab, \check{a}\check{b})(a\check{b}, \check{a}b)(\check{a}b, a\check{b})(\check{a}\check{b}, ab)$

$(ab)7(a\check{a}, b\check{b})(b\check{b}, a\check{a})$

The automorphism group of  $(a\check{a}b\check{b})69$  is  $\{(), (a\check{a})(b\check{b}), (a\check{a}b\check{b}), (a\check{b}\check{a}b)\}$ .  
 Forbidden minors of the maximum 5-dimensional basis:

$$\begin{array}{cccccc} a_{01} & a_{02} & \check{a}_{03} & b_{12} & b_{13} & \check{a}_{23} \\ a_{01} & a_{02} & b_{03} & a_{12} & \check{a}_{13} & \check{b}_{23} \\ a_{01} & a_{02} & b_{03} & b_{12} & \check{a}_{13} & \check{b}_{23} \\ a_{01} & a_{02} & b_{03} & b_{12} & b_{13} & \check{a}_{23} \\ a_{01} & a_{02} & b_{03} & b_{12} & \check{b}_{13} & \check{b}_{23} \\ a_{01} & a_{02} & \check{b}_{03} & b_{12} & \check{b}_{13} & \check{a}_{23} \\ a_{01} & a_{02} & \check{b}_{03} & b_{12} & a_{13} & \check{b}_{23} \\ a_{01} & a_{02} & \check{b}_{03} & b_{12} & \check{a}_{13} & a_{23} \\ a_{01} & a_{02} & \check{b}_{03} & b_{12} & \check{a}_{13} & \check{b}_{23} \\ a_{01} & a_{02} & \check{b}_{03} & b_{12} & \check{b}_{13} & \check{a}_{23} \\ a_{01} & \check{a}_{02} & b_{03} & b_{12} & b_{13} & \check{a}_{23} \\ a_{01} & \check{a}_{02} & \check{b}_{03} & b_{12} & \check{a}_{13} & \check{b}_{23} \\ a_{01} & b_{02} & b_{03} & \check{a}_{12} & \check{b}_{13} & \check{b}_{23} \\ a_{01} & b_{02} & b_{03} & b_{12} & \check{b}_{13} & \check{a}_{23} \end{array}$$

$(a\check{a}b\check{b})70$  14 Mandatory:  $aba\ baa\ abb\ bab \text{ --- } bba\ aaa\ bbb\ aab \text{ --- --- } bb\check{b}$   
 3 Forbidden:  $\text{--- --- --- --- } aab \text{ --- --- --- } bb\check{a}\ aa\check{a} \text{ ---}$

;	$a$	$\check{a}$	$b$	$\check{b}$
$a$	$a\check{b}$	$1'a\check{a}\check{b}\check{b}$	$a\check{a}\check{b}$	$a\check{b}\check{b}$
$\check{a}$	$1'a\check{a}\check{b}\check{b}$	$\check{a}\check{b}$	$\check{a}\check{b}\check{b}$	$a\check{a}\check{b}$
$b$	$a\check{a}\check{b}$	$\check{a}\check{b}\check{b}$	$a\check{b}\check{b}$	$1'a\check{a}\check{b}\check{b}$
$\check{b}$	$a\check{b}\check{b}$	$a\check{a}\check{b}$	$1'a\check{a}\check{b}\check{b}$	$\check{a}\check{b}\check{b}$

$ D_2  = 4$
$ D_3  = 9$
$ D_4  = 69$
$ 4 \times 4\text{'s in maximum proper } 5\text{DB}  = 53$

$$(a\check{a}\check{b}\check{b})70 \cong |\supseteq (a)2(a\check{a}\check{b}\check{b})$$

$$(a\check{a})3(ab, \check{a}\check{b})(a\check{b}, \check{a}\check{b})(\check{a}\check{b}, a\check{b})(\check{a}\check{b}, ab)$$

$$(ab)7(a\check{a}, \check{b}\check{b})(\check{b}\check{b}, a\check{a})$$

The automorphism group of  $(a\check{a}\check{b}\check{b})70$  is  $\{(), (a\check{a})(\check{b}\check{b})\}$ .  
 Forbidden minors of the maximum 5-dimensional basis:

- $a_{01} a_{02} \check{a}_{03} b_{12} b_{13} \check{a}_{23}$
- $a_{01} a_{02} b_{03} a_{12} \check{a}_{13} b_{23}$
- $a_{01} a_{02} b_{03} b_{12} \check{a}_{13} \check{b}_{23}$
- $a_{01} a_{02} b_{03} b_{12} b_{13} \check{a}_{23}$
- $a_{01} a_{02} b_{03} b_{12} b_{13} \check{b}_{23}$
- $a_{01} a_{02} b_{03} b_{12} \check{b}_{13} \check{a}_{23}$
- $a_{01} a_{02} b_{03} b_{12} \check{b}_{13} b_{23}$
- $a_{01} a_{02} \check{b}_{03} b_{12} a_{13} \check{b}_{23}$
- $a_{01} a_{02} \check{b}_{03} b_{12} \check{a}_{13} a_{23}$
- $a_{01} a_{02} \check{b}_{03} b_{12} \check{a}_{13} \check{b}_{23}$
- $a_{01} a_{02} \check{b}_{03} b_{12} \check{b}_{13} \check{a}_{23}$
- $a_{01} \check{a}_{02} \check{b}_{03} b_{12} \check{a}_{13} \check{b}_{23}$
- $a_{01} b_{02} b_{03} \check{a}_{12} \check{b}_{13} \check{b}_{23}$
- $a_{01} b_{02} b_{03} b_{12} \check{b}_{13} b_{23}$
- $a_{01} b_{02} \check{b}_{03} \check{a}_{12} \check{b}_{13} b_{23}$
- $a_{01} b_{02} \check{b}_{03} \check{b}_{12} \check{b}_{13} b_{23}$

$(a\check{a}\check{b}\check{b})71$  15 Mandatory:  $aba baa abb bab$  —  $bba aaa bbb aab$  —  $aa\check{a} b\check{b}\check{b}$   
 2 Forbidden: — — — —  $aab$  — — — —  $b\check{b}\check{a}$  — —

;	$a$	$\check{a}$	$b$	$\check{b}$
$a$	$a\check{a}\check{b}$	$1'a\check{a}\check{b}\check{b}$	$a\check{a}\check{b}$	$a\check{b}\check{b}$
$\check{a}$	$1'a\check{a}\check{b}\check{b}$	$a\check{a}\check{b}$	$\check{a}\check{b}\check{b}$	$a\check{a}\check{b}$
$b$	$a\check{a}\check{b}$	$\check{a}\check{b}\check{b}$	$a\check{b}\check{b}$	$1'a\check{a}\check{b}\check{b}$
$\check{b}$	$a\check{b}\check{b}$	$a\check{a}\check{b}$	$1'a\check{a}\check{b}\check{b}$	$\check{a}\check{b}\check{b}$

$ D_2  = 4$
$ D_3  = 10$
$ D_4  = 81$
$B_5$ is a basis
$B_6$ is a basis

$$(a\check{a}\check{b}\check{b})71 \cong |\supseteq (a)2(a\check{a}\check{b}\check{b})$$

$$(a\check{a})3(ab, \check{a}\check{b})(a\check{b}, \check{a}b)(\check{a}b, a\check{b})(\check{a}\check{b}, ab)$$

$$(ab)7(a\check{a}, b\check{b})(b\check{b}, a\check{a})$$

The automorphism group of  $(a\check{a}b\check{b})71$  is  $\{(), (a\check{a})(b\check{b}), (ab\check{a}\check{b}), (a\check{b}\check{a}b)\}$ .

$(a\check{a}b\check{b})72$  14 Mandatory:  $aba\ baa\ abb\ bab$  —  $bba\ aaa\ bbb\ aab\ bb\check{a}$  — —  
3 Forbidden: — — — —  $aab$  — — — —  $aa\check{a}\ b\check{b}$

;	$a$	$\check{a}$	$b$	$\check{b}$
$a$	$a\check{b}$	$1'a\check{a}b\check{b}$	$a\check{a}b\check{b}$	$ab\check{b}$
$\check{a}$	$1'a\check{a}b\check{b}$	$\check{a}b$	$\check{a}b\check{b}$	$a\check{a}b\check{b}$
$b$	$a\check{a}b\check{b}$	$\check{a}b\check{b}$	$a\check{a}b$	$1'a\check{a}b\check{b}$
$\check{b}$	$ab\check{b}$	$a\check{a}b\check{b}$	$1'a\check{a}b\check{b}$	$a\check{a}b$

$ D_2  = 4$
$ D_3  = 9$
$ D_4  = 90$
$ 4 \times 4\text{'s in maximum proper 5DB}  = 83$

$$(a\check{a}b\check{b})72 \cong \supseteq (a)2(a\check{a}b\check{b})$$

$$(a\check{a})3(ab, \check{a}\check{b})(a\check{b}, \check{a}b)(\check{a}b, a\check{b})(\check{a}\check{b}, ab)$$

$$(ab)7(a\check{a}, b\check{b})(b\check{b}, a\check{a})$$

$$(ab\check{b})35(a\check{a}, b, \check{b})(a\check{a}, \check{b}, b)$$

The automorphism group of  $(a\check{a}b\check{b})72$  is  $\{(), (a\check{a})(b\check{b})\}$ .

Forbidden minors of the maximum 5-dimensional basis:

$$a_{01} a_{02} b_{03} b_{12} a_{13} b_{23}$$

$$a_{01} \check{a}_{02} b_{03} b_{12} b_{13} \check{a}_{23}$$

$$a_{01} \check{a}_{02} b_{03} b_{12} \check{a}_{13} b_{23}$$

$$a_{01} b_{02} b_{03} b_{12} b_{13} a_{23}$$

$$a_{01} b_{02} b_{03} b_{12} b_{13} \check{a}_{23}$$

$$a_{01} b_{02} b_{03} b_{12} b_{13} a_{23}$$

$$a_{01} b_{02} b_{03} b_{12} b_{13} \check{a}_{23}$$

A program written in Pascal showed on 11-19-1992 that  $(a\check{a}b\check{b})72$  has no 6-dimensional basis. Filename: `newdata`. Therefore  $(a\check{a}b\check{b})72 \in \text{RA}_5 \sim \text{RA}_6$ .

$(a\check{a}b\check{b})73$  15 Mandatory:  $aba\ baa\ abb\ bab$  —  $bba\ aaa\ bbb\ aab\ bb\check{a}$  —  $b\check{b}$   
2 Forbidden: — — — —  $aab$  — — — —  $aa\check{a}$  —

;	$a$	$\check{a}$	$b$	$\check{b}$
$a$	$a\check{b}$	$1'a\check{a}b\check{b}$	$a\check{a}b\check{b}$	$ab\check{b}$
$\check{a}$	$1'a\check{a}b\check{b}$	$\check{a}b$	$\check{a}b\check{b}$	$a\check{a}b\check{b}$
$b$	$a\check{a}b\check{b}$	$\check{a}b\check{b}$	$a\check{a}b\check{b}$	$1'a\check{a}b\check{b}$
$\check{b}$	$ab\check{b}$	$a\check{a}b\check{b}$	$1'a\check{a}b\check{b}$	$a\check{a}b\check{b}$

$ D_2  = 4$
$ D_3  = 10$
$ D_4  = 108$
$B_5$ is a basis
$B_6$ is a basis

$$\begin{aligned}
 (a\check{a}b\check{b})73 &\cong |\supseteq (a)2(a\check{a}b\check{b}) \\
 &(a\check{a})3(ab, \check{a}\check{b})(a\check{b}, \check{a}b)(\check{a}b, a\check{b})(\check{a}\check{b}, ab) \\
 &(ab)7(a\check{a}, b\check{b})(b\check{b}, a\check{a}) \\
 &(ab\check{b})37(a\check{a}, b, \check{b})(a\check{a}, \check{b}, b)
 \end{aligned}$$

The automorphism group of  $(a\check{a}b\check{b})73$  is  $\{(), (a\check{a})(b\check{b})\}$ .

$(a\check{a}b\check{b})74$     15 Mandatory:  $aba\ baa\ abb\ bab \text{ --- } bba\ aaa\ bbb\ aab\ bb\check{a}\ aa\check{a} \text{ ---}$   
 2 Forbidden:  $\text{--- --- --- --- } aab \text{ --- --- --- --- } b\check{b}\check{b}$

;	$a$	$\check{a}$	$b$	$\check{b}$
$a$	$a\check{a}\check{b}$	$1'a\check{a}b\check{b}$	$a\check{a}b\check{b}$	$ab\check{b}$
$\check{a}$	$1'a\check{a}b\check{b}$	$a\check{a}b$	$\check{a}b\check{b}$	$a\check{a}b\check{b}$
$b$	$a\check{a}b\check{b}$	$\check{a}b\check{b}$	$a\check{a}b$	$1'a\check{a}b\check{b}$
$\check{b}$	$ab\check{b}$	$a\check{a}b\check{b}$	$1'a\check{a}b\check{b}$	$a\check{a}\check{b}$

$ D_2  = 4$
$ D_3  = 10$
$ D_4  = 104$
$B_5$ is a basis
$B_6$ is a basis

$$\begin{aligned}
 (a\check{a}b\check{b})74 &\cong |\supseteq (a)2(a\check{a}b\check{b}) \\
 &(a\check{a})3(ab, \check{a}\check{b})(a\check{b}, \check{a}b)(\check{a}b, a\check{b})(\check{a}\check{b}, ab) \\
 &(ab)7(a\check{a}, b\check{b})(b\check{b}, a\check{a}) \\
 &(ab\check{b})35(a\check{a}, b, \check{b})(a\check{a}, \check{b}, b)
 \end{aligned}$$

The automorphism group of  $(a\check{a}b\check{b})74$  is  $\{(), (a\check{a})(b\check{b})\}$ .

$(a\check{a}b\check{b})75$     16 Mandatory:  $aba\ baa\ abb\ bab \text{ --- } bba\ aaa\ bbb\ aab\ bb\check{a}\ aa\check{a}\ bb\check{b}$   
 1 Forbidden:  $\text{--- --- --- --- } aab \text{ --- --- --- ---}$

;	$a$	$\check{a}$	$b$	$\check{b}$
$a$	$a\check{a}\check{b}$	$1'a\check{a}b\check{b}$	$a\check{a}b\check{b}$	$ab\check{b}$
$\check{a}$	$1'a\check{a}b\check{b}$	$a\check{a}b$	$\check{a}b\check{b}$	$a\check{a}b\check{b}$
$b$	$a\check{a}b\check{b}$	$\check{a}b\check{b}$	$a\check{a}b\check{b}$	$1'a\check{a}b\check{b}$
$\check{b}$	$ab\check{b}$	$a\check{a}b\check{b}$	$1'a\check{a}b\check{b}$	$a\check{a}b\check{b}$

$ D_2  = 4$
$ D_3  = 11$
$ D_4  = 122$
$B_5$ is a basis
$B_6$ is a basis

$$\begin{aligned}
 (a\check{a}b\check{b})75 &\cong |\supseteq (a)2(a\check{a}b\check{b}) \\
 &(a\check{a})3(ab, \check{a}\check{b})(a\check{b}, \check{a}b)(\check{a}b, a\check{b})(\check{a}\check{b}, ab) \\
 &(ab)7(a\check{a}, b\check{b})(b\check{b}, a\check{a}) \\
 &(ab\check{b})37(a\check{a}, b, \check{b})(a\check{a}, \check{b}, b)
 \end{aligned}$$

The automorphism group of  $(a\check{a}b\check{b})75$  is  $\{(), (a\check{a})(b\check{b})\}$ .

$(a\check{a}b\check{b})76$  15 Mandatory:  $aba\ baa\ abb\ bab\ aab\ bba$  — —  $a\check{a}\check{b}\ b\check{b}\check{a}\ a\check{a}\check{b}\ b\check{b}\check{b}$   
2 Forbidden: — — — — —  $aaa\ bbb$  — — — —

;	$a$	$\check{a}$	$b$	$\check{b}$
$a$	$\check{a}\check{b}\check{b}$	$1'b\check{b}$	$a\check{a}b\check{b}$	$a\check{a}b\check{b}$
$\check{a}$	$1'b\check{b}$	$ab\check{b}$	$a\check{a}b\check{b}$	$a\check{a}b\check{b}$
$b$	$a\check{a}b\check{b}$	$a\check{a}b\check{b}$	$a\check{a}\check{b}$	$1'a\check{a}$
$\check{b}$	$a\check{a}b\check{b}$	$a\check{a}b\check{b}$	$1'a\check{a}$	$a\check{a}\check{b}$

$J$ :	$a_{01}$	$\check{a}_{02}$	$b_{21}$	$b_{03}$	$\check{b}_{31}$	$\check{a}_{24}$	$b_{43}$
$L$ :	true.						
$M$ :	true.						

$ D_2  = 4$
$ D_3  = 10$
$ D_4  = 74$
No 5DB

$(a\check{a}b\check{b})76 \cong |\supseteq (a)2(a\check{a}b\check{b})$   
 $(a\check{a})3(ab, \check{a}\check{b})(a\check{b}, \check{a}b)(\check{a}b, a\check{b})(\check{a}\check{b}, ab)$   
 $(ab)7(a\check{a}, b\check{b})(b\check{b}, a\check{a})$   
 $(abb)9(a\check{a}, b, \check{b})(a\check{a}, \check{b}, b)(b\check{b}, a, \check{a})(b\check{b}, \check{a}, a)$

The automorphism group of  $(a\check{a}b\check{b})76$  is  $\{(), (a\check{a}), (b\check{b}), (a\check{a})(b\check{b}), (ab)(\check{a}\check{b}), (ab\check{a}\check{b}), (a\check{b}\check{a}b), (a\check{b})(\check{a}b)\}$ .  
Its subalgebra  $(abb)9$  has a flexible atom.

$(a\check{a}b\check{b})77$  14 Mandatory:  $aba\ baa\ abb\ bab\ aab\ bba$  —  $bbb\ a\check{a}\check{b}\ b\check{b}\check{a}$  — —  
3 Forbidden: — — — — —  $aaa$  — — —  $aa\check{a}\ b\check{b}\check{b}$

;	$a$	$\check{a}$	$b$	$\check{b}$
$a$	$b\check{b}$	$1'b\check{b}$	$a\check{a}b\check{b}$	$a\check{a}b\check{b}$
$\check{a}$	$1'b\check{b}$	$b\check{b}$	$a\check{a}b\check{b}$	$a\check{a}b\check{b}$
$b$	$a\check{a}b\check{b}$	$a\check{a}b\check{b}$	$a\check{a}\check{b}$	$1'a\check{a}b\check{b}$
$\check{b}$	$a\check{a}b\check{b}$	$a\check{a}b\check{b}$	$1'a\check{a}b\check{b}$	$a\check{a}\check{b}$

$ D_2  = 4$
$ D_3  = 9$
$ D_4  = 90$
$ 4 \times 4\text{'s in maximum proper 5DB}  = 88$

$(a\check{a}b\check{b})77 \cong |\supseteq (a)2(a\check{a}b\check{b})$   
 $(a\check{a})3(ab, \check{a}\check{b})(a\check{b}, \check{a}b)(\check{a}b, a\check{b})(\check{a}\check{b}, ab)$   
 $(ab)6(b\check{b}, a\check{a})$   
 $(abb)7(b\check{b}, a, \check{a})(b\check{b}, \check{a}, a)$   
 $(abb)34(a\check{a}, b, \check{b})(a\check{a}, \check{b}, b)$

The automorphism group of  $(a\check{a}b\check{b})77$  is  $\{(), (a\check{a}), (b\check{b}), (a\check{a})(b\check{b})\}$ .  
Forbidden minors of the maximum 5-dimensional basis:

$$\begin{matrix} a_{01} & b_{02} & b_{03} & \check{b}_{12} & \check{b}_{13} & a_{23} \\ a_{01} & b_{02} & b_{03} & b_{12} & \check{b}_{13} & a_{23} \end{matrix}$$

A program written in Pascal showed on 11-19-1992 that  $(a\check{a}b\check{b})77$  has no 6-dimensional basis. Filename: `newdata`. Therefore  $(a\check{a}b\check{b})77 \in \text{RA}_5 \sim \text{RA}_6$ .

Another proofs that  $(a\check{a}b\check{b})77 \notin \text{RRA}$  comes from the observation that  $\supseteq (a\check{b}\check{b})34 \notin \text{RRA}$ .

$(a\check{a}b\check{b})78$  15 Mandatory:  $aba \ baa \ abb \ bab \ aab \ bba \ \text{---} \ bbb \ aab \ bb\check{a} \ \text{---} \ bb\check{b}$   
 2 Forbidden:  $\text{---} \ \text{---} \ \text{---} \ \text{---} \ \text{---} \ \text{---} \ \text{aaa} \ \text{---} \ \text{---} \ \text{---} \ \text{---} \ a\check{a}\check{a} \ \text{---}$

;	$a$	$\check{a}$	$b$	$\check{b}$
$a$	$b\check{b}$	$1'b\check{b}$	$a\check{a}b\check{b}$	$a\check{a}b\check{b}$
$\check{a}$	$1'b\check{b}$	$b\check{b}$	$a\check{a}b\check{b}$	$a\check{a}b\check{b}$
$b$	$a\check{a}b\check{b}$	$a\check{a}b\check{b}$	$a\check{a}b\check{b}$	$1'a\check{a}b\check{b}$
$\check{b}$	$a\check{a}b\check{b}$	$a\check{a}b\check{b}$	$1'a\check{a}b\check{b}$	$a\check{a}b\check{b}$

$ D_2  = 4$
$ D_3  = 10$
$ D_4  = 112$
$B_5$ is a basis
$B_6$ is a basis

$$\begin{aligned} (a\check{a}b\check{b})78 \cong | \supseteq & (a)2(a\check{a}b\check{b}) \\ & (a\check{a})3(ab, \check{a}b)(a\check{b}, \check{a}b)(\check{a}b, a\check{b})(\check{a}\check{b}, ab) \\ & (ab)6(b\check{b}, a\check{a}) \\ & (abb\check{b})7(b\check{b}, a, \check{a})(b\check{b}, \check{a}, a) \\ & (abb\check{b})36(a\check{a}, b, \check{b})(a\check{a}, \check{b}, b) \end{aligned}$$

The automorphism group of  $(a\check{a}b\check{b})78$  is  $\{(), (a\check{a}), (b\check{b}), (a\check{a})(b\check{b})\}$ .  
 $\in \text{RRA}$  since  $b$  is flexible.

$(a\check{a}b\check{b})79$  15 Mandatory:  $aba \ baa \ abb \ bab \ aab \ bba \ \text{---} \ bbb \ aab \ bb\check{a} \ a\check{a}\check{a} \ \text{---}$   
 2 Forbidden:  $\text{---} \ \text{---} \ \text{---} \ \text{---} \ \text{---} \ \text{---} \ \text{aaa} \ \text{---} \ \text{---} \ \text{---} \ \text{---} \ bb\check{b}$

;	$a$	$\check{a}$	$b$	$\check{b}$
$a$	$\check{a}b\check{b}$	$1'b\check{b}$	$a\check{a}b\check{b}$	$a\check{a}b\check{b}$
$\check{a}$	$1'b\check{b}$	$ab\check{b}$	$a\check{a}b\check{b}$	$a\check{a}b\check{b}$
$b$	$a\check{a}b\check{b}$	$a\check{a}b\check{b}$	$a\check{a}b$	$1'a\check{a}b\check{b}$
$\check{b}$	$a\check{a}b\check{b}$	$a\check{a}b\check{b}$	$1'a\check{a}b\check{b}$	$a\check{a}\check{b}$

$B_5$ is a basis
$J$ : true.
$L$ : true.
$M$ : true.

$ D_2  = 4$
$ D_3  = 10$
$ D_4  = 103$
$B_5$ is a basis

$$(a\check{a}b\check{b})79 \cong | \supseteq (a)2(a\check{a}b\check{b})$$

$$(a\check{a})3(ab, \check{a}\check{b})(a\check{b}, \check{a}b)(\check{a}b, a\check{b})(\check{a}\check{b}, ab)$$

$$(ab)7(a\check{a}, \check{b}\check{b})(\check{b}\check{b}, a\check{a})$$

$$(a\check{b}\check{b})9(\check{b}\check{b}, a, \check{a})(\check{b}\check{b}, \check{a}, a)$$

$$(a\check{b}\check{b})35(a\check{a}, b, \check{b})(a\check{a}, \check{b}, b)$$

The automorphism group of  $(a\check{a}\check{b}\check{b})79$  is  $\{(), (a\check{a}), (b\check{b}), (a\check{a})(b\check{b})\}$ .

A program written in Pascal showed on 11-19-1992 that  $(a\check{a}\check{b}\check{b})72$  has a proper 6-dimensional basis. Filename: **newdata**. Therefore  $(a\check{a}\check{b}\check{b})72 \in \text{RA}_6$ . Is  $(a\check{a}\check{b}\check{b})72 \in \text{RA}_7$ ? Note that  $(a\check{b}\check{b})9$  and  $(a\check{b}\check{b})35$  have flexible atoms.

$(a\check{a}\check{b}\check{b})80$  16 Mandatory:  $aba\ baa\ abb\ bab\ aab\ bba$  —  $bbb\ aab\ bb\check{a}\ a\check{a}\ bb\check{b}$   
1 Forbidden: — — — — —  $aaa$  — — — — —

;	$a$	$\check{a}$	$b$	$\check{b}$
$a$	$\check{a}\check{b}\check{b}$	$1' b\check{b}$	$a\check{a}\check{b}\check{b}$	$a\check{a}\check{b}\check{b}$
$\check{a}$	$1' b\check{b}$	$a\check{b}\check{b}$	$a\check{a}\check{b}\check{b}$	$a\check{a}\check{b}\check{b}$
$b$	$a\check{a}\check{b}\check{b}$	$a\check{a}\check{b}\check{b}$	$a\check{a}\check{b}\check{b}$	$1' a\check{a}\check{b}\check{b}$
$\check{b}$	$a\check{a}\check{b}\check{b}$	$a\check{a}\check{b}\check{b}$	$1' a\check{a}\check{b}\check{b}$	$a\check{a}\check{b}\check{b}$

$ D_2  = 4$
$ D_3  = 11$
$ D_4  = 125$
$B_5$ is a basis
$B_6$ is a basis

$$(a\check{a}\check{b}\check{b})80 \cong |\supseteq (a)2(a\check{a}\check{b}\check{b})$$

$$(a\check{a})3(ab, \check{a}\check{b})(a\check{b}, \check{a}b)(\check{a}b, a\check{b})(\check{a}\check{b}, ab)$$

$$(ab)7(a\check{a}, \check{b}\check{b})(\check{b}\check{b}, a\check{a})$$

$$(a\check{b}\check{b})9(\check{b}\check{b}, a, \check{a})(\check{b}\check{b}, \check{a}, a)$$

$$(a\check{b}\check{b})37(a\check{a}, b, \check{b})(a\check{a}, \check{b}, b)$$

The automorphism group of  $(a\check{a}\check{b}\check{b})80$  is  $\{(), (a\check{a}), (b\check{b}), (a\check{a})(b\check{b})\}$ .  
 $\in \text{RRA}$  since  $b$  is flexible.

$(a\check{a}\check{b}\check{b})81$  15 Mandatory:  $aba\ baa\ abb\ bab\ aab\ bba\ aaa\ bbb\ aab\ bb\check{a}$  — —  
2 Forbidden: — — — — —  $aa\check{a}\ bb\check{b}$

;	$a$	$\check{a}$	$b$	$\check{b}$
$a$	$a\check{b}\check{b}$	$1' a\check{a}\check{b}\check{b}$	$a\check{a}\check{b}\check{b}$	$a\check{a}\check{b}\check{b}$
$\check{a}$	$1' a\check{a}\check{b}\check{b}$	$\check{a}\check{b}\check{b}$	$a\check{a}\check{b}\check{b}$	$a\check{a}\check{b}\check{b}$
$b$	$a\check{a}\check{b}\check{b}$	$a\check{a}\check{b}\check{b}$	$a\check{a}\check{b}$	$1' a\check{a}\check{b}\check{b}$
$\check{b}$	$a\check{a}\check{b}\check{b}$	$a\check{a}\check{b}\check{b}$	$1' a\check{a}\check{b}\check{b}$	$a\check{a}\check{b}$

$ D_2  = 4$
$ D_3  = 10$
$ D_4  = 132$
$B_5$ is a basis
$B_6$ is a basis

$$(a\check{a}\check{b}\check{b})81 \cong |\supseteq (a)2(a\check{a}\check{b}\check{b})$$



$$(a\check{a})3(ab, \check{a}\check{b})(a\check{b}, \check{a}b)(\check{a}b, a\check{b})(\check{a}\check{b}, ab)$$

$$(ab)7(a\check{a}, \check{b}\check{b})(\check{b}\check{b}, a\check{a})$$

$$(a\check{b}\check{b})35(a\check{a}, b, \check{b})(a\check{a}, \check{b}, b)(\check{b}\check{b}, a, \check{a})(\check{b}\check{b}, \check{a}, a)$$

The automorphism group of  $(a\check{a}\check{b}\check{b})81$  is  $\{(), (a\check{a}), (b\check{b}), (a\check{a})(b\check{b}), (ab)(\check{a}\check{b}), (a\check{b}\check{a}\check{b}), (a\check{b}\check{a}b), (a\check{b})(\check{a}b)\}$ .  
 $\infty$ RRA: split  $<$  on  $\mathbb{Q}$ .

$(a\check{a}\check{b}\check{b})82$  16 Mandatory:  $aba\ baa\ abb\ bab\ aab\ bba\ aaa\ bbb\ aab\ bb\check{a} \text{ --- } bb\check{b}$   
 1 Forbidden:  $\text{--- --- --- --- --- --- --- --- --- } aa\check{a} \text{ ---}$

;	$a$	$\check{a}$	$b$	$\check{b}$
$a$	$ab\check{b}$	$1'a\check{a}\check{b}\check{b}$	$a\check{a}\check{b}\check{b}$	$a\check{a}\check{b}\check{b}$
$\check{a}$	$1'a\check{a}\check{b}\check{b}$	$\check{a}\check{b}\check{b}$	$a\check{a}\check{b}\check{b}$	$a\check{a}\check{b}\check{b}$
$b$	$a\check{a}\check{b}\check{b}$	$a\check{a}\check{b}\check{b}$	$a\check{a}\check{b}\check{b}$	$1'a\check{a}\check{b}\check{b}$
$\check{b}$	$a\check{a}\check{b}\check{b}$	$a\check{a}\check{b}\check{b}$	$1'a\check{a}\check{b}\check{b}$	$a\check{a}\check{b}\check{b}$

$ D_2  = 4$
$ D_3  = 11$
$ D_4  = 154$
$B_5$ is a basis
$B_6$ is a basis

$$(a\check{a}\check{b}\check{b})82 \cong | \supseteq (a)2(a\check{a}\check{b}\check{b})$$

$$(a\check{a})3(ab, \check{a}\check{b})(a\check{b}, \check{a}b)(\check{a}b, a\check{b})(\check{a}\check{b}, ab)$$

$$(ab)7(a\check{a}, \check{b}\check{b})(\check{b}\check{b}, a\check{a})$$

$$(a\check{b}\check{b})35(\check{b}\check{b}, a, \check{a})(\check{b}\check{b}, \check{a}, a)$$

$$(a\check{b}\check{b})37(a\check{a}, b, \check{b})(a\check{a}, \check{b}, b)$$

The automorphism group of  $(a\check{a}\check{b}\check{b})82$  is  $\{(), (a\check{a}), (b\check{b}), (a\check{a})(b\check{b})\}$ .  
 $(a\check{a}\check{b}\check{b})82 \in$  RRA since  $b$  is flexible.

$(a\check{a}\check{b}\check{b})83$  17 Mandatory:  $aba\ baa\ abb\ bab\ aab\ bba\ aaa\ bbb\ aab\ bb\check{a}\ aa\check{a}\ bb\check{b}$   
 0 Forbidden:  $\text{--- --- --- --- --- --- --- --- ---}$

;	$a$	$\check{a}$	$b$	$\check{b}$
$a$	$a\check{a}\check{b}\check{b}$	$1'a\check{a}\check{b}\check{b}$	$a\check{a}\check{b}\check{b}$	$a\check{a}\check{b}\check{b}$
$\check{a}$	$1'a\check{a}\check{b}\check{b}$	$a\check{a}\check{b}\check{b}$	$a\check{a}\check{b}\check{b}$	$a\check{a}\check{b}\check{b}$
$b$	$a\check{a}\check{b}\check{b}$	$a\check{a}\check{b}\check{b}$	$a\check{a}\check{b}\check{b}$	$1'a\check{a}\check{b}\check{b}$
$\check{b}$	$a\check{a}\check{b}\check{b}$	$a\check{a}\check{b}\check{b}$	$1'a\check{a}\check{b}\check{b}$	$a\check{a}\check{b}\check{b}$

$ D_2  = 4$
$ D_3  = 12$
$ D_4  = 176$
$B_5$ is a basis
$B_6$ is a basis

$$(a\check{a}\check{b}\check{b})83 \cong | \supseteq (a)2(a\check{a}\check{b}\check{b})$$

$$(a\check{a})3(ab, \check{a}\check{b})(a\check{b}, \check{a}b)(\check{a}b, a\check{b})(\check{a}\check{b}, ab)$$

$$(ab)7(a\check{a}, \check{b}\check{b})(\check{b}\check{b}, a\check{a})$$

$$(abb)37(a\check{a}, b, \check{b})(a\check{a}, \check{b}, b)(b\check{b}, a, \check{a})(b\check{b}, \check{a}, a)$$

The automorphism group of  $(a\check{a}b\check{b})83$  is  $\{(), (a\check{a}), (b\check{b}), (a\check{a})(b\check{b}), (ab)(\check{a}\check{b}), (ab\check{a}\check{b}), (a\check{b}\check{a}b), (a\check{b})(\check{a}b)\}$ .  
 $\in$  RRA since  $a$  and  $b$  are flexible.

**1.1. More group representability.** Using the first 25 groups, some group representability can be proved for a few of the 1316 and a few of the 3013.

$$\begin{array}{l} (abc\check{c})1 \quad \{3\} \quad \{2, 4\} \quad \{5, 6\} \quad \{7, 8\} \quad Q_8 \\ (abc\check{c})1 \quad \{4\} \quad \{3, 7\} \quad \{2, 5\} \quad \{6, 8\} \quad Z_8 \\ \\ (abc\check{c})3 \quad \{3\} \quad \{5, 6, 7, 8\} \quad \{2\} \quad \{4\} \quad Q_8 \\ (abc\check{c})3 \quad \{4\} \quad \{2, 3, 6, 7\} \quad \{5\} \quad \{8\} \quad Z_2 \times Z_4 \\ (abc\check{c})3 \quad \{4\} \quad \{2, 5, 6, 8\} \quad \{3\} \quad \{7\} \quad D_8 \\ (abc\check{c})3 \quad \{4\} \quad \{2, 5, 6, 8\} \quad \{3\} \quad \{7\} \quad Z_8 \\ \\ (abc\check{c})13 \quad \{2\} \quad \{4, 6\} \quad \{3, 5\} \quad \{7, 8\} \quad Z_2 \times Z_4 \\ (abc\check{c})13 \quad \{4\} \quad \{3, 7\} \quad \{2, 6\} \quad \{5, 8\} \quad Z_8 \\ \\ (abcd)1 \quad \{2, 4\} \quad \{3, 6\} \quad \{5, 9\} \quad \{7, 8\} \quad Z_3 \times Z_3 \\ \\ (abcd)2 \quad \{2\} \quad \{3\} \quad \{5\} \quad \{4, 6, 7, 8\} \quad Z_2^3 \\ (abcd)2 \quad \{2\} \quad \{4\} \quad \{6\} \quad \{3, 5, 7, 8\} \quad D_8 \\ (abcd)2 \quad \{2\} \quad \{4\} \quad \{6\} \quad \{3, 5, 7, 8\} \quad Z_2 \times Z_4 \\ \\ (abcd)12 \quad \{4\} \quad \{2, 5\} \quad \{6, 8\} \quad \{3, 7\} \quad D_8 \\ (abcd)12 \quad \{4\} \quad \{2, 8\} \quad \{5, 6\} \quad \{3, 7\} \quad Z_8 \\ \\ (abcd)26 \quad \{2, 4\} \quad \{5, 7\} \quad \{6, 8\} \quad \{3\} \quad Q_8 \\ (abcd)26 \quad \{2, 6\} \quad \{3, 7\} \quad \{5, 8\} \quad \{4\} \quad D_8 \\ (abcd)26 \quad \{2, 6\} \quad \{3, 7\} \quad \{5, 8\} \quad \{4\} \quad Z_2 \times Z_4 \\ (abcd)26 \quad \{3, 5\} \quad \{4, 6\} \quad \{7, 8\} \quad \{2\} \quad Z_2^3 \\ \\ (abcd)49 \quad \{3, 6\} \quad \{2, 9\} \quad \{5, 7\} \quad \{4, 8\} \quad Z_9 \end{array}$$